

# TS MARINE 2015-2016

## DEVOIRS DE MATHÉMATIQUES

### CORRIGES

DS1 15/09/2015 page 2 (étude de fonctions)

DS2 13/10/2015 page 5

DV 06/11/2015 page 12 (complexes)

DS2 24/11/2015 page 14

DV 11/12/2015 page 23 (fonction exponentielle)

BAC BLANC 12/01/2016 page 25

DV 29/01/2016 page 33 (probabilités)

DS 09/02/2016 page 35

DS 02/03/2016 page 44

DV 08/04/2016 page 52

DS 17/05/2015 page 54

**EXERCICE I :** (6 points) 1° 1+1+1,5 +1 2° 1,5

La courbe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction  $f$  définie sur  $] -\infty; 2[ \cup ]2; +\infty[$ .

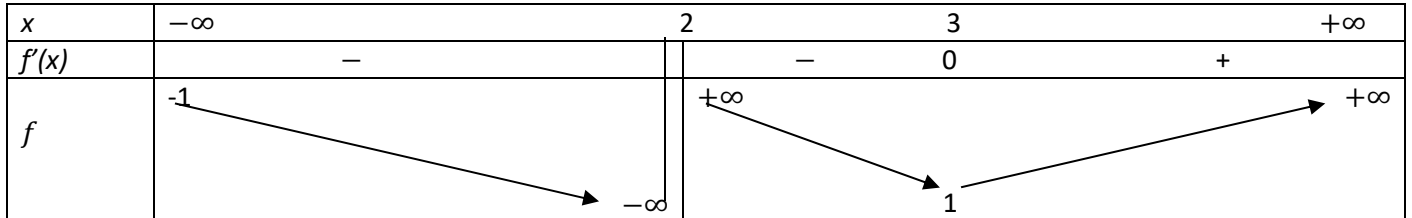
1)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$  (A)       $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$  et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$  (B)

2) avec (A), la droite d'équation  $y = -1$  est asymptote à  $C_f$  au voisinage de  $-\infty$ .

Avec (B), la droite d'équation  $x = 2$  à  $C_f$  à gauche et à droite de 2.

3)



4) par lecture graphique du coefficient directeur de la tangente à la courbe  $C_f$  au point considéré :

$f'(-1) = -\frac{1}{3}$  et  $f'(3) = 0$

5) Une équation de la tangente à  $C_f$  en  $A(-1; f(-1))$  est  $T_I: y = f'(-1) \times (x + 1) + f(-1)$

Or  $f(-1) = -2$  et  $f'(-1) = -\frac{1}{3}$

Donc  $T_I: y = -\frac{1}{3} \times (x + 1) + (-2)$

Soit  $T_I: y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} - 2$

$T_I: y = -\frac{1}{3}x - \frac{7}{3}$

**EXERCICE II :** (11 points) 1° : 3.5 2° : 2 3° : 2+2 4° : 1.5

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]-3; +\infty[$  par :

$f(x) = \frac{2x^2+16x+27}{(x+3)^2}$

1° **Limite en  $+\infty$**

La fonction  $f$  est une fonction rationnelle donc en  $+\infty$  :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+16x+27}{(x+3)^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+16x+27}{x^2+6x+9} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2$

VERIFIEZ !!!!!

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

donc la droite d'équation  $y = 2$  est asymptote horizontale à la courbe  $C_f$  au voisinage de  $+\infty$

**limite en  $-3$**

Le dénominateur est carré donc il ne change pas de signe en  $x = -3$ ,

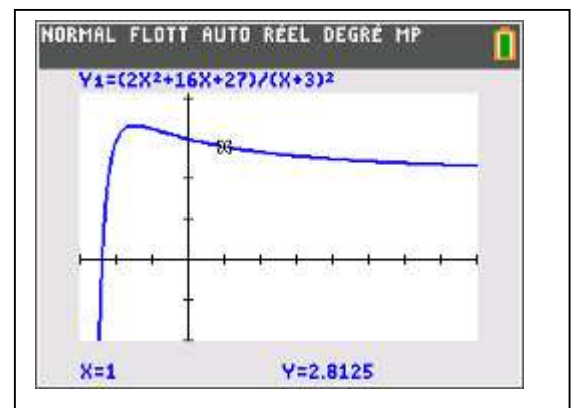
$\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} (2x^2 + 16x + 27) = -3 < 0$

$\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} (x + 3)^2 = 0$  et  $(x + 3)^2 > 0$  pour  $x \in ]-3; +\infty[$

donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} \frac{2x^2+16x+27}{(x+3)^2} = -\infty$

Ainsi  $\lim_{\substack{x \rightarrow -3 \\ x > -3}} f(x) = -\infty$ .

On déduit que la droite d'équation  $x = -3$  est asymptote verticale à la courbe  $C_f$



2° Etudier la position relative de la courbe  $C_f$  et de la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2$

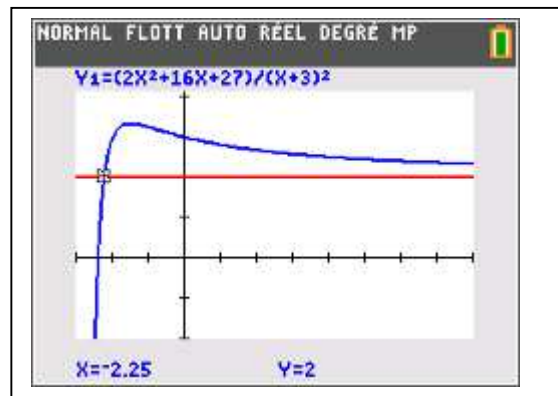
On étudie le signe de  $f(x) - y_\Delta$  pour  $x \in ]-3; +\infty[$

$$f(x) - y_\Delta = \frac{2x^2 + 16x + 27}{x^2 + 6x + 9} - 2 = \frac{2x^2 + 16x + 27 - 2x^2 - 12x - 18}{x^2 + 6x + 9} = \frac{4x + 9}{(x + 3)^2}$$

Racine du numérateur :  $-\frac{9}{4}$

Pour tout  $x \in ]3; +\infty[$ ,  $(x - 3)^2 > 0$  donc  $f(x) - 2$  a le même signe que  $4x + 9$

$x$	$-3$	$-\frac{9}{4}$	$+\infty$
$4x + 9$		$-$ $0$ $+$	
$(x + 3)^2$	$0$	$+$	$+$
$f(x) - 2$	$\parallel$	$-$ $0$ $+$	



**Conclusion :**

La courbe est au-dessous de la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2$  sur  $]-3; -\frac{9}{4}[$

La droite  $\Delta$  coupe la courbe au point d'abscisse  $x = -\frac{9}{4}$

La courbe est au-dessus de la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2$  sur  $]-\frac{9}{4}; +\infty[$

3° a) Déterminer la fonction dérivée  $f'$ .

$f$  est dérivable sur  $]-3; +\infty[$  comme quotient de fonctions dérivables le dénominateur ne s'annulant pas.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

OU  $f$  est une fonction rationnelle définie sur  $]-3; +\infty[$  donc  $f$  dérivable sur  $]-3; +\infty[$

$u(x) = 2x^2 + 16x + 27$  donc  $u'(x) = 4x + 16$ ;  $v(x) = (x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$  donc  $v'(x) = 2x + 6 = 2(x + 3)$

Pour tout  $x$  de  $]-3; +\infty[$  :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x + 16)(x + 3)^2 - 2(x + 3)(2x^2 + 16x + 27)}{(x + 3)^4} \\ &= \frac{(x + 3)[(4x + 16)(x + 3) - 2(2x^2 + 16x + 27)]}{(x + 3)^4} \\ &= \frac{4x^2 + 12x + 16x + 48 - 4x^2 - 32x - 54}{(x + 3)^3} \end{aligned}$$

Il faut chercher à organiser, factoriser le numérateur. Si vous avez développé le numérateur de la dérivée vous avez un polynôme du second degré dont vous pouvez calculer les racines et factoriser avec la formule  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

Pour tout  $x$ , de  $]-3; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{-4x - 6}{(x + 3)^3}$

**Remarque** si vous n'avez pas vu la simplification par  $(x - 3)$  ; vous obtenez  $f'(x) = \frac{-4x^2 - 18x - 18}{(x + 3)^4}$

Vous pouvez poursuivre :  $N(x) = -4x^2 - 18x - 18$   $\Delta = \dots = 36 = 6^2$   $x_1 = \dots = -\frac{3}{2}$   $x_2 = \dots = -3$

$$f'(x) = \frac{-4x^2 - 18x - 18}{(x + 3)^4} = \frac{-4\left(x + \frac{3}{2}\right)(x + 3)}{(x + 3)^4} = \frac{-4x - 6}{(x + 3)^3}$$

b) Etudier le signe de  $f'(x)$

Racine du numérateur :  $x = -\frac{3}{2} = -1,5$

Signe de la dérivée : grâce au tableau :

$x$	$-3$	$-1,5$	$+\infty$
$-4x - 6$		$+$ $0$ $-$	
$(x + 3)^3$		$+$	$+$
$f'(x)$	$\parallel$	$+$ $0$ $-$	

$X^3$  a le même signe que  $X$

4° Dresser le tableau de variation complet de la fonction  $f$ .

$x$	-3	-1,5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{10}{3}$	2

**EXERCICE III : (3 points)**

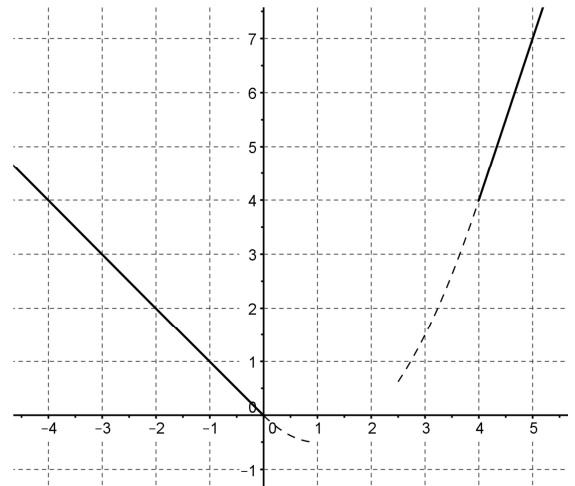
On souhaite raccorder deux tuyaux droits, par un coude de forme parabolique sans changement brusque de direction selon le graphique ci-dessous. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 3x - 8 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

où  $a, b, c$  sont des réels.

**Analyse :** on doit avoir

$f(0) = 0$  et  $f(4) = 4$  pour qu'il y ait raccordement  
 $f'(0) = -1$  et  $f'(4) = 3$  pour qu'il n'y ait pas de brusque changement de direction



**Correction exercice**

Pour qu'il y ait raccordement en 0, on doit avoir  $f(0) = 0$  donc  $a \times 0^2 + b \times 0 + c = 0$   
donc  $c = 0$  donc pour tout réel  $x, f(x) = ax^2 + bx$ .

De plus, pour que  $f$  soit dérivable sur  $\mathbb{R}$ , il faut qu'elle le soit en particulier en 0 donc il faut que les deux portions de courbe admettent la même tangente au point d'abscisse 0. Or la courbe représentant la fonction  $f$  admet la droite d'équation  $y = -x$  comme tangente au point d'abscisse 0 (puisque une droite est confondue avec ses tangentes en chacun de ses points) donc  $f'(0) = -1$  (puisque  $f'(a)$  est le coefficient directeur de la tangente à la courbe  $C_f$  au point d'abscisse  $a$ ).

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}, f'(x) = 2ax + b$  donc avec  $f'(0) = -1$ , on obtient  $2a \times 0 + b = -1$  donc  $b = -1$ .

On en déduit donc que pour tout réel  $x, f(x) = ax^2 - x$ .

Enfin, pour qu'il y ait raccordement en 4 on doit avoir  $f(4) = 4$  donc  $a \times 4^2 - 4 = 4$   
donc  $16a = 8$  donc  $a = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ .

Au final, pour tout réel  $x, f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$ .

**Vérification de la quatrième condition :** Les deux portions de courbe doivent admettre la même tangente au point d'abscisse 4 puisque  $f$  doit être dérivable en 4 donc on vérifie avec l'expression de  $f(x)$  trouvée que  $f'(4) = 3$  (3 étant le coefficient directeur de la droite représentant le deuxième tuyau) :

Avec  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$  on a  $f'(x) = x - 1$  donc  $f'(4) = 4 - 1 = 3$ .

**Conclusion :** l'expression de  $f(x)$  convient bien.

**EXERCICE I :** (5 points) Antilles juin 2015 A : 0.5 B : 1° : 0.5 - 2° : 0.5- 3° : 1.25 - 4° : 1.25 - 5° 0.5- 6° 0.5

**Partie A (0,5 point)**

Entrée	$p = 2$
Traitement	Affecter à $u$ la valeur 5 Pour $k = 1 : u = 0,5 \times 5 + 0,5(1 - 1) - 1,5 = 1$ Pour $k = 2 : u = 0,5 \times 1 + 0,5(2 - 1) - 1,5 = -0,5$ Fin de pour
Sortie	Afficher -0,5

**Partie B**

1.

☺ Pour avoir la liste des termes calculés :  
Dès que vous calculez un terme, vous l'affichez !

Variables	$k$ et $p$ sont des entiers naturels $u$ est un réel
Entrée	Demander la valeur de $p$
Traitement	Affecter à $u$ la valeur 5 Pour $k$ variant de 1 à $p$ Affecter à $u$ la valeur $0,5u + 0,5(k - 1) - 1,5$ <b>Afficher <math>u</math></b> Fin de pour

2. A partir du tableau,  $(u_n)$  est décroissante sur les quatre premiers termes, puis croissante entre les rangs 3 et 4. Donc, NON la suite  $(u_n)$  n'est pas décroissante.

Sur la base des premiers termes d'une suite, on ne peut rien affirmer mais uniquement conjecturer les variations.

3. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 3, on a :  $u_{n+1} > u_n$

Initialisation : Pour  $n = 3$

$u_3 = -0,75 ; u_4 = -0,375$  . donc  $u_4 > u_3$  Donc l'inégalité est vraie pour  $n = 3$ .

Hérédité : Supposons que pour un certain entier  $n$ , on ait  $u_{n+1} > u_n$

et montrons qu'alors  $u_{n+2} > u_{n+1}$

On a :  $u_{n+1} > u_n$

Donc :  $0,5 u_{n+1} > 0,5 u_n$

Donc  $0,5 u_{n+1} + 0,5(n + 1) - 1,5 > 0,5 u_n + 0,5(n + 1) - 1,5$

Donc  $u_{n+2} > 0,5 u_n + 0,5n - 1,5 + 0,5$ .

Donc  $u_{n+2} > u_{n+1} + 0,5 > u_{n+1}$

Donc  $u_{n+2} > u_{n+1}$

Conclusion : D'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout  $n \geq 3$ , on a  $u_{n+1} > u_n$ .

Ainsi la suite  $(u_n)$  est croissante à partir du rang 3.

4. Soit  $n$  entier naturel :

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= 0,1u_{n+1} - 0,1(n + 1) + 0,5 \\
 &= 0,1(0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1(n + 1) + 0,5 \\
 &= 0,5 \times 0,1u_n + 0,5 \times 0,1n - 0,15 - 0,1 + 0,5 - 0,1n \\
 &= 0,5 \times 0,1u_n - 0,5 \times 0,1n + 0,25 \\
 &= 0,5 \times (0,1u_n - 0,1n + 0,5) = 0,5v_n
 \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $v_{n+1} = 0,5v_n$ , ainsi la suite  $(v_n)$  est géométrique de raison  $q = 0.5$

La suite  $(v_n)$  étant géométrique : pour tout entier naturel  $n$  :  $v_n = v_0 \times q^n = 0,5^n$ .

(En effet  $v_0 = 0,1u_0 - 0,1 \times 0 + 0,5 = 1$ )

5. soit  $n$  un entier naturel :

On a :  $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$

Donc  $0,1u_n = v_n + 0,1n - 0,5$

Donc  $0,1u_n = 0,5^n + 0,1n - 0,5$

Donc  $u_n = 10(0,5^n + 0,1n - 0,5)$

Donc  $u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$ .

6.  $q = 0,5 \in ] - 1 ; 1[$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$

Donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 10 \times 0,5^n = 0$

De plus  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n - 5) = +\infty$

Donc, par somme,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

**EXERCICE II : (5 points) NON SPECIALITE**

d'après Pondichéry 2008

1° : 2    2° : 1    3° : 1.25    4° 0.75

On a cherché à modéliser l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat en fonction de l'année.

Soit  $u_n$  le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année  $n$ .

On pose  $n = 0$  en 2005,  $u_0 = 1$  et, pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$ .

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0 ; 20]$  par  $f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x)$ .

1. a. Étudier les variations de  $f$  sur  $[0 ; 20]$ , puis dresser le tableau de variation de la fonction

Dérivée : Pour  $x \in [0 ; 20]$ , on a :  $f(x) = 2x - \frac{1}{10}x^2$ , donc  $f'(x) = 2 - \frac{1}{5}x$

Tableau de variation de la fonction  $f$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{5}x \Leftrightarrow x = 10$

$x$	0		10		20	
$f'(x)$		+	0	-		
$f(x)$	0	↗		10	↘	
	0					

1. b. En déduire que pour tout  $x \in [0 ; 20]$ ,  $f(x) \in [0 ; 10]$ .

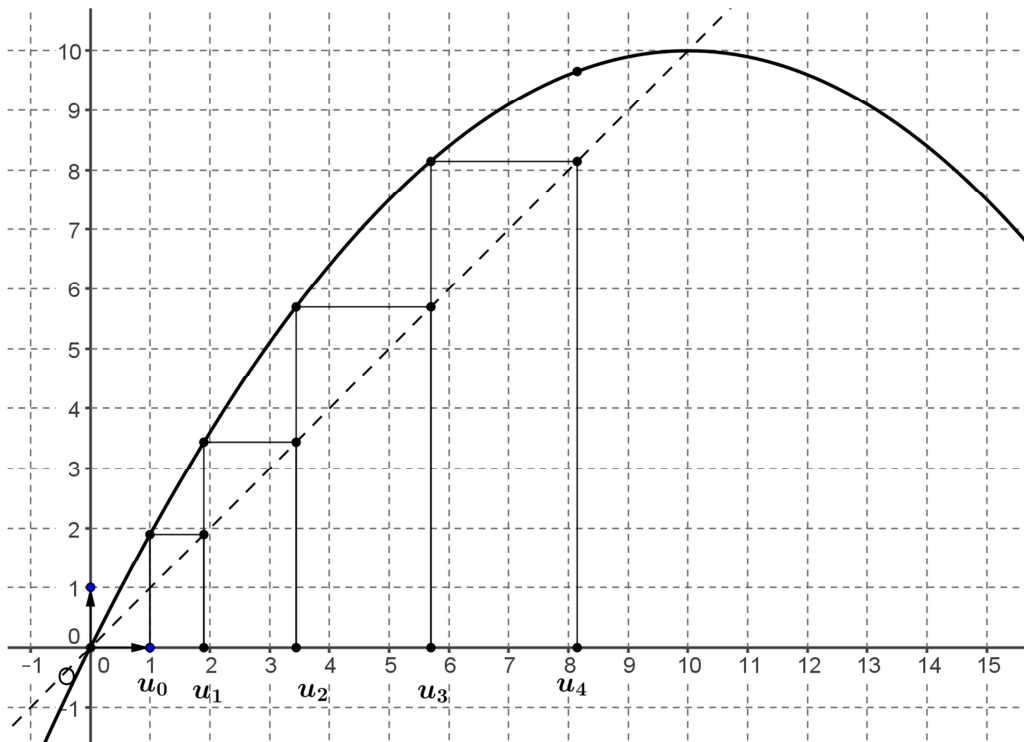
D'après le tableau de variation ci-dessus, le minimum et le maximum de la fonction  $f$  sur  $[0 ; 20]$  sont respectivement 0 et 10, ainsi : pour tout  $x \in [0 ; 20]$ , on a  $f(x) \in [0 ; 10]$ .

1. c. On donne en page 4 la courbe représentative  $C$  de la fonction  $f$  dans un repère orthonormal.

On construit les cinq premiers termes de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  sur l'axe des abscisses.

On place  $u_0 = 1$

Puis on construit en s'aidant de la droite d'équation  $y = x$



2. Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$

$u_0 = 1$  et, pour tout  $n \geq 0$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n)$ . On remarque :  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

**Démontrons par récurrence que : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a :  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$**

**1<sup>ère</sup> étape : initialisation:**  $n = 0$

On a  $u_0 = 1$  et  $u_1 = f(u_0) = f(1) = \frac{19}{10} = 1,9$  or  $0 \leq 1 \leq 1,9 \leq 10$  donc  $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 10$ ,

l'inégalité est vraie pour  $n = 0$ .

**2<sup>ème</sup> étape : hérédité**

On suppose que pour UN entier  $n$  arbitrairement fixé dans  $\mathbb{N}$ , on a :  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$

et on prouve que  $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$ .

$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$

donc  $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(10)$  puisque  **$f$  est croissante sur  $[0 ; 10]$**

or  $f(0) = 0$  et  $f(10) = 10$ ,  $f(u_n) = u_{n+1}$  et  $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$

donc  $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$ .

**Conclusion :**

La propriété est vraie pour  $n=0$  et est héréditaire, donc d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , c'est-à-dire pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on a  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$

**3. a. D'**après la question 2

pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $u_n \leq u_{n+1}$ , c'est-à-dire la suite  $(u_n)$  est croissante

pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $u_n \leq 10$ , c'est-à-dire la suite  $(u_n)$  est majorée

la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée, donc convergente. **COURS !!!!!**



3. Les nombres complexes obtenus seront donnés **sous forme algébrique**.

3. a. Calculer  $Z = \frac{2iz}{z+i}$  pour  $z = 3 + i$

$$Z = \frac{2i(3+i)}{3+i+i} = \frac{(6i-2)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{18i+12-6+4i}{9-(2i)^2} = \frac{6+22i}{9+4} = \frac{6+22i}{13} = \frac{6}{13} + \frac{22i}{13} = \frac{6}{13} + \frac{22}{13}i$$

3. b. Pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$ ,

$$2iz + 1 - i = 0$$

$$\Leftrightarrow 2iz = -1 + i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-1+i}{2i}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{(-1+i)(-2i)}{(2i)(-2i)}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2i - 2i^2}{-4i^2}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{2+2i}{4}$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Ainsi, la solution est  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

3. c. Pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$ ,

$$(iz - 1)(z + 2)(2z + 1 - 4i) = 0$$

$$\Leftrightarrow iz - 1 = 0 \text{ ou } z + 2 = 0 \text{ ou } 2z + 1 - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{1}{i} \text{ ou } z + 2 = 0 \text{ ou } 2z + 1 - 4i = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -i \text{ ou } z = -2 \text{ ou } z = \frac{-1+4i}{2}$$

Ainsi les solutions sont  $-i$ ,  $-2$  et  $\frac{-1}{2} + 2i$

**EXERCICE IV : (5 points)** partie A : 3,25 partie B : 1,75

**Partie A :** On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 1[$  par  $f(x) = (1+x)\sqrt{1-x^2}$

1. Montrer que pour  $x \in [0; 1[$ , on a :  $f'(x) = \frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$  :

La fonction  $x \mapsto 1-x^2$  est dérivable (en tant que fonction polynôme) sur  $[0; 1[$  et strictement positive sur  $[0; 1[$  (trinôme du second degré de racines  $-1$  et  $1$  avec  $a = -1 < 0$ ) donc la fonction  $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$  est dérivable sur  $[0; 1[$ .

La fonction  $x \mapsto 1+x$  est dérivable sur  $[0; 1[$

Donc la fonction  $f$  est dérivable sur  $[0; 1[$  en tant que produit de fonction dérivables sur  $[0; 1[$ .

Pour tout  $x$  de  $[0; 1[$ , on pose  $u(x) = 1+x$  et  $v(x) = \sqrt{1-x^2}$

$$\text{donc } u'(x) = 1 \text{ et } v'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

Avec  $(u \times v)' = u'v + uv'$ , on a

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{1-x^2} + \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \times (x+1) = \frac{\sqrt{1-x^2}^2 - x^2 - x}{\sqrt{1-x^2}} = \dots = \frac{-2x^2 - x + 1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ainsi pour tout  $x$  de  $[0; 1[$ ,  $f'(x) = \frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

2. Etudier le signe de  $f'(x)$  :

Pour tout  $x$  de  $[0; 1[$ ,  $1 - x^2 > 0$  donc  $\sqrt{1 - x^2} > 0$

Racines de  $1 - x - 2x^2 = -2x^2 - x + 1$ :  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) = 9 > 0$

$x_1 = \frac{1-3}{-4} = \frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2} \in [0; 1[$   $x_2 = \frac{1+3}{-4} = -1$  et  $-1 \notin [0; 1[$

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1
$-2x^2 - x + 1$		+	0 -
$\sqrt{1 - x^2}$		+	+
$f'(x)$		+	0 -

3. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$		+	0 -
$f$	1	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	

☛ on calcule les valeurs exactes des images

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \times \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

**Partie B :**

Un récipient a la forme d'un prisme droit :

base est un trapèze isocèle  $ABCD$  (voir figure 1)

hauteur  $AA'$

Toutes les dimensions de ce récipient sont fixées, sauf la longueur  $CD$ .

On donne  $AB = BC = AD = 1$  et  $AA' = BB' = CC' = DD' = 2$  ; l'unité est le mètre.

1. Distance  $AH$  en fonction de  $x$

Dans le triangle  $DAH$  rectangle en  $H$ , on applique le théorème de Pythagore :

$$DA^2 = AH^2 + DH^2 \quad \text{donc } AH^2 = DA^2 - DH^2 = 1 - x^2$$

Comme  $x \in [0; 1[$ ,  $1 - x^2 > 0$  donc  $AH = \sqrt{1 - x^2}$ .

Aire du trapèze  $ABCD$  en fonction de  $x$ :

le trapèze est isocèle (c'est-à-dire avec un axe de symétrie !) donc  $DH = CH'$  en nommant  $H'$  le projeté orthogonal de  $B$  sur  $[CD]$

Avec la formule  $Aire \text{ trapèze} = \frac{1}{2} \times hauteur \times (Petite \text{ base} + Grande \text{ base})$  et utilisant la question a) :

Pour tout  $x$  de  $[0; 1[$ :

$$Aire(ABCD) = \frac{1}{2} \times AH \times (AB + DC) = \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2} \times (1 + x)$$

2. Pour tout  $x$  de  $[0; 1[$ :

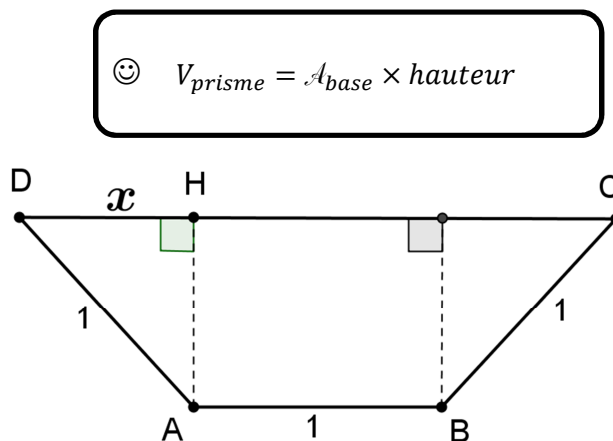
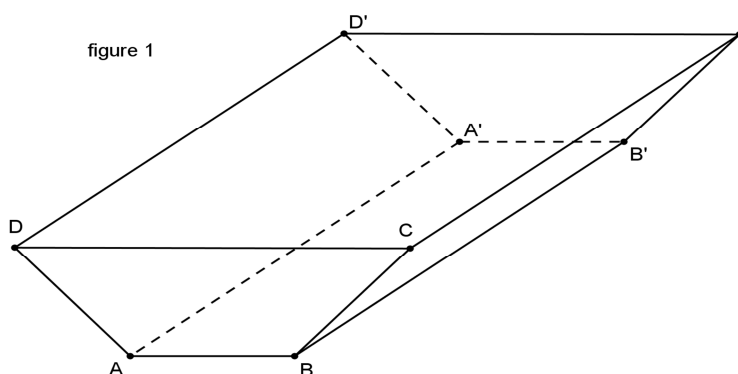
$$V(x) = AireBase \times hauteur = Aire(ABCD) \times AA' = 2 \times \frac{1}{2} (x + 1) \sqrt{1 - x^2} = (x + 1) \sqrt{1 - x^2}$$

Ainsi, on a bien pour tout  $x$  de  $[0; 1[$ ,  $V(x) = 2 \times f(x)$

3. La fonction  $V$  a les mêmes variations que la fonction  $f$ , donc en utilisant les questions B 2) et A3), , on en déduit que le volume de ce récipient est maximal pour  $x = 0,5 \text{ m}$

et il vaut  $2 \times \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \text{ m}^3$  soit environ  $2,598 \text{ m}^3$  en arrondissant au  $\text{dm}^3$  près.

figure 1



**EXERCICE I : (4 points)** 1.5+2.5

a) pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$

$$z^2 + 2z + 17 = 0 \quad \Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 17 = -64 = 64i^2 = (8i)^2$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-2 - 8i}{2} \text{ ou } z = \frac{-2 + 8i}{2}$$

$\Leftrightarrow z = -1 - 4i$  ou  $z = -1 + 4i$  Les solutions de l'équation sont  $-1 - 4i$  et  $-1 + 4i$

b) pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$ , on pose  $z = x + iy$  avec  $x, y$  réels

$$(2 + i)z + \bar{z} = i$$

$$\Leftrightarrow (2 + i)(x + iy) + (x - iy) = i$$

$$\Leftrightarrow 2x + 2iy + ix - y + x - iy = i$$

$$\Leftrightarrow 3x - y + i(x + y) = i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ x + 3x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{4} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

La solution est  $\frac{1}{4} + \frac{3}{4}i$

**EXERCICE II : (7 points)** 1° : 1+1+1.5 2° 1.75 3° 1.75

Le plan complexe est muni d'un repère  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$  On considère  $A$  et  $B$  d'affixes  $z_A = \sqrt{3} - i$  et  $z_B = 2i$

1° construction de  $A$

$$|z_A| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$$

Construction de A :

On a  $|z_A| = 2$  donc  $OA = 2$  donc  $A \in \mathcal{C}(O ; 2)$

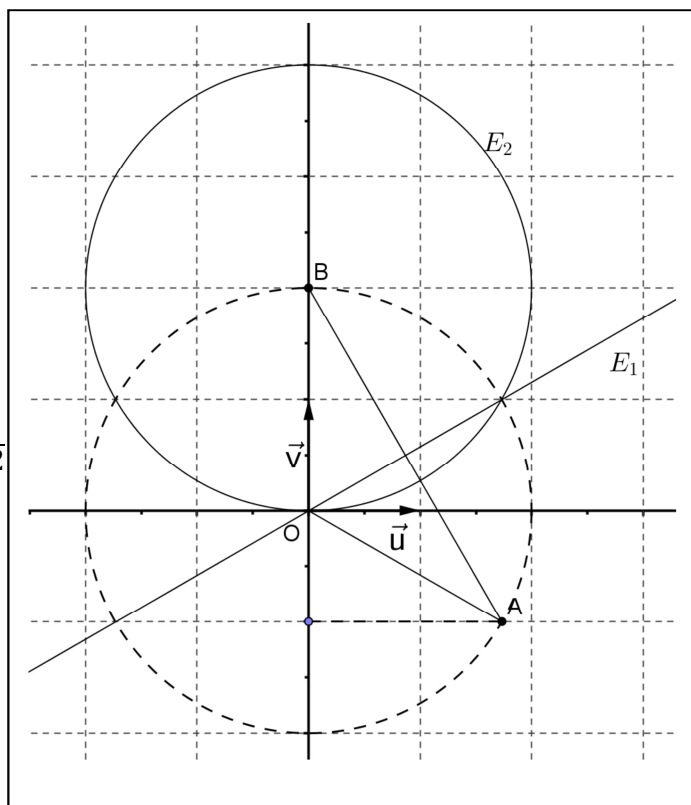
De plus  $Im(z_A) = -1$  et  $Re(z_A) > 0$

b)  $OB = |z_B| = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$

on a  $OA = OB$  donc le triangle  $OAB$  est isocèle en  $O$

Remarque :  $AB = |z_B - z_A| = \dots = |-\sqrt{3} + 3i| = \dots = \sqrt{12}$

Le triangle  $OAB$  n'est pas rectangle.



2° Ensemble  $E_1$

$$M_z \in E_1$$

$$\Leftrightarrow |z - 2i| = |z - \sqrt{3} + i|$$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_B| = |z_M - z_A|$$

$$\Leftrightarrow BM = AM \quad \text{Ainsi, l'ensemble } E_1 \text{ est la médiatrice du segment } [AB]$$

3° Ensemble  $E_2$

$$M_z \in E_2$$

$$\Leftrightarrow |z - 2i| = 2$$

$$\Leftrightarrow |z_M - z_B| = 2$$

$$\Leftrightarrow BM = 2 \quad \text{Ainsi, l'ensemble } E_2 \text{ est le cercle de centre } B, \text{ de rayon } 2$$

### EXERCICE III : ( points)

Soit  $f$  la fonction qui à tout point  $M_z$  du plan complexe, associe le point  $M'_z$ , tel que :

$$z' = iz^2 + 2z$$

1° Déterminer l'affixe du point  $A'$ , image de  $A$  d'affixe  $z_A = 1 + i$

$$z_{A'} = iz_A^2 + 2z_A = i(1 + i)^2 + 2(1 + i) = i(1 + 2i - 1) + 2 + 2i = \dots = 2i$$

2° a) Développer  $(iz + 3)(z + i) = iz^2 - z + 3z + 3i = iz^2 + 2z + 3i$

b) On résout dans  $\mathbb{C}$

$$z' = -3i$$

$$\Leftrightarrow iz^2 + 2z = -3i$$

$$\Leftrightarrow iz^2 + 2z + 3i = 0$$

$$\Leftrightarrow (iz + 3)(z + i) = 0 \quad \text{cf q2. a.}$$

$$\Leftrightarrow iz + 3 = 0 \text{ ou } z + i = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{3}{i} \text{ ou } z = z = -i$$

$$\Leftrightarrow z = 3i \text{ ou } z = -i$$

Ainsi le point  $B'$  admet deux antécédents  $B_1$  d'affixe  $3i$  et  $B_2$  d'affixe  $-i$

3° Points invariants par  $f$ .

On résout dans  $\mathbb{C}$

$$z' = z$$

$$\Leftrightarrow iz^2 + 2z = z$$

$$\Leftrightarrow iz^2 + z = 0$$

$$\Leftrightarrow z(iz + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } iz + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = \frac{-1}{i}$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = i$$

Ainsi, il existe deux points invariants par  $f$  : l'origine  $O$  du repère et le point  $K$  d'affixe  $i$

3° a) Pour tout  $z$  de  $\mathbb{C}$ , on pose  $z = x + iy$  avec  $x ; y$  réels

$$z' = i(x + iy)^2 + 2(x + iy) = i(x^2 + 2ixy - y^2) + 2x + 2iy = \dots = 2x - 2xy + i(x^2 - y^2 + 2y)$$

On obtient  $Re(z') = 2x - 2xy$

b)  $M_z \in E$

$$\Leftrightarrow Re(z') = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2xy = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x(1 - y) = 0 \quad \bullet^{\otimes} \text{ on ne divise jamais par une expression qui peut s'annuler !!!}$$

$$\Leftrightarrow 2x = 0 \text{ ou } 1 - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } y = 1$$

Ainsi, l'ensemble  $E$  est la réunion de deux droites d'équation  $x = 0$  et  $y = 1$

**Apprenez !!!**

Schéma :  $M_z \xrightarrow{f} M'_z$

1°  $A_{1+i} \xrightarrow{f} A'_{??}$  on calcule  $z_{A'}$

2°b  $?? \xrightarrow{f} B'_{-3i}$  on résout :  $z' = -3i \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z = \dots$

3°  $M$  invariant par  $f$  si et seulement si  $M = M'$

On résout  $M_z = M'_z \Leftrightarrow z = z' \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z = \dots$

**EXERCICE I : (6 points)**

**Partie A : Etude d'une fonction auxiliaire 1° 1,5 2° 2**

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 - 3x - 3$

1° a)  $g$  est une fonction polynôme donc ses limites en  $-\infty$  et en  $+\infty$  sont égales à celles de son terme de plus haut degré.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

b) Calculer la dérivée et étudier son signe.

$g$  est une fonction polynome, donc  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  :  $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$

Polynôme du second degré de racines  $-1$  et  $1$ , avec un coefficient de  $x^2$  égal à  $3$ , donc positif

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$

c) Dresser le tableau de variation de la fonction  $g$ .

$x$	$-\infty$	$-1$	$1$	$\alpha$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	$-1$	$-5$	$0$	$+\infty$

2° a) Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  a une unique solution dans  $\mathbb{R}$  que l'on notera  $\alpha$ .

D'après son tableau de variation,

\* Le maximum de la fonction  $g$  sur  $] -\infty; 1 [$  est  $-1$ , or  $-1 < 0$ , donc l'équation  $g(x) = 0$  n'a pas de solution dans  $] -\infty; 1 [$ .

\*  $g$  est continue et strictement croissante sur  $[1; +\infty[$

donc  $g$  réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  sur son image  $[-5; +\infty[$ ;

de plus  $0 \in [-5; +\infty[$

donc l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution dans  $[1; +\infty[$  notée  $\alpha$

Ainsi,  $\alpha$  est l'unique solution de l'équation  $g(x) = 0$  dans  $\mathbb{R}$ .

b) Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $0,01$ .

$x$	$g(x)$
2,10	-0,04
$\alpha$	0
2,11	0,06

D'où  $2,10 < \alpha < 2,11$

**3. Dresser le tableau de signe de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .**

D'après le tableau de variation de la fonction, complété avec  $\alpha$  unique solution de l'équation  $g(x) = 0$ ,

$x$	$-\infty$	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$0$	$+$

**Partie B : Etude de la fonction  $f$  définie sur  $]1; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$  1°-2° : 1 3°-5° : 1,5**

On note  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1° Limite de la fonction  $f$  en  $1$ .

sur  $]1; +\infty[$ ,  $x^2 - 1 > 0$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (2x^3 + 3) = 5 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (x^2 - 1) = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1} = +\infty$$

donc  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$ .

On déduit que la droite d'équation  $x = 1$  est asymptote verticale à la courbe  $C_f$

2° Limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .

La fonction  $f$  est une fonction rationnelle donc sa limite en  $+\infty$  est celle du quotient de ses termes de plus haut degré.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$$

donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3° a. Calculer  $f'(x)$ .

$f$  est une fonction rationnelle, donc  $f$  est dérivable sur son ensemble de définition  $]1; +\infty[$

Pour  $x \in ]1; +\infty[$  :

$$f'(x) = \frac{6x^2 \times (x^2 - 1) - 2x \times (2x^3 + 3)}{(x^2 - 1)^2} = \dots = \frac{2x^4 - 6x^2 - 6x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^3 - 3x - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

$$d'où \quad f'(x) = \frac{2x \cdot g(x)}{(x^2 - 1)^2}$$

b. Etudier le signe de  $f'(x)$ .

$x$	1	$\alpha$	$+\infty$
$2x$		+	+
$g(x)$		-	0
$(x^2 - 1)^2$	0	+	+
$f'(x)$		-	0

Cf A3°

4° Tableau de variation de la fonction  $f$ .

$x$	1	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$
		$f(\alpha)$	

5° On recherche le plus grand entier  $N$  tel que pour tout  $x$  de  $]1; +\infty[$ , on ait  $N < f(x)$

$f$  atteint son minimum en  $\alpha$  avec  $2,10 < \alpha < 2,11$

$f(2,10) \approx 6,3114$  et  $f(2,11) \approx 6,3115$  donc  $f(\alpha) \approx 6,3$

Donc  $N = 6$  est le plus grand entier tel que pour tout  $x$  de  $]1; +\infty[$ , on ait  $N < f(x)$

**EXERCICE II : (5 points) NON SPECIALITE** d'après Sujet national Septembre 2010

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 5$  et pour tout nombre entier naturel  $n$ , par  $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$ .

**1. Variations de la fonction  $f$**        $1^\circ : 1$      $2^\circ : 0.5$      $3^\circ : 1$      $4^\circ : 0.75$      $5^\circ : 0.5$      $6^\circ : 1.75$

La fonction  $f$  est définie sur l'intervalle  $] - 2 ; +\infty[$  par  $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $] - 2 ; +\infty[$  comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle, le dénominateur ne s'annulant pas

Dérivée : Pour tout  $x$  de  $] - 2 ; +\infty[$ , on a :  $f'(x) = \frac{4(x+2) - 1(4x-1)}{(x+2)^2} = \frac{9}{(x+2)^2}$

Signe de la dérivée : Pour tout  $x$  de  $] - 2 ; +\infty[$ , on a :  $(x+2)^2 > 0 \Rightarrow \frac{9}{(x+2)^2} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

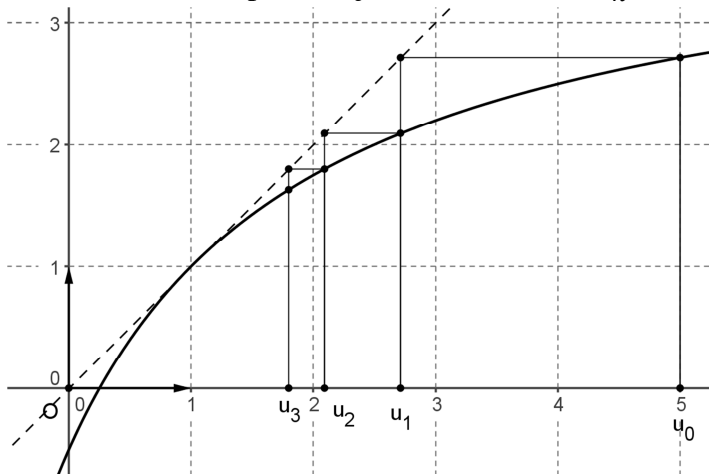
Sens de variation : la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $] - 2 ; +\infty[$

Tableau de variation de la fonction  $f$

$x$	$-2$	$1$	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$		↗	

## 2 : construction

(Hors barème : on peut conjecturer : la suite  $(u_n)$  semble décroissante, convergente et de limite 1)



**3. Montrons par récurrence que :** pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n > 1$

**1<sup>ère</sup> étape : initialisation**  $n=0$

On a :  $u_0 = 5$  donc  $u_0 > 1$  donc  $P_0$  est vraie

L'inégalité est (déjà) vraie pour  $n = 0$ , le plus petit entier de  $\mathbb{N}$

**2<sup>ème</sup> étape : hérédité**

Hypothèse de récurrence : on suppose que pour un certain rang  $n$  arbitrairement fixé dans  $\mathbb{N}$ , on a :  $u_n > 1$

On prouve que  $u_{n+1} > 1$ .

$u_n > 1$       DEMARCHE A APPRENDRE  
 $\Rightarrow f(u_n) > f(1)$  car  $f$  strictement croissante sur  $] - 2 ; +\infty[$  donc sur  $]1 ; +\infty[$   
 $\Rightarrow u_{n+1} > 1$  car  $f(1) = \frac{3}{3} = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$

**Conclusion :**

La propriété est initialisée et héréditaire donc d'après le principe du raisonnement par récurrence,

**pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $u_n > 1$ .**

4. Montrons que : Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $u_{n+1} \leq u_n$ .

Méthode 1 :

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :

$$\star u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{(4u_n - 1 - u_n^2 - 2u_n)}{u_n + 2} = \frac{-(u_n^2 - 2u_n + 1)}{u_n + 2} = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2}$$

$$\star u_n > 1 \text{ (cf 3. a.)} \Rightarrow \begin{cases} (u_n - 1)^2 > 0 \\ u_n + 2 > 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -(u_n - 1)^2 < 0 \\ u_n + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2} < 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$$

donc on a montré que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $u_{n+1} \leq u_n$

(Ainsi la suite  $(u_n)$  est strictement décroissante, ce qui valide la première conjecture)

Méthode 2 : raisonnement par récurrence

5. Convergence :

D'après la q4 Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $u_{n+1} \leq u_n$  donc la suite  $(u_n)$  est décroissante,

D'après la q3 Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $u_n > 1$  donc la suite est minorée par 1

Donc la suite  $(u_n)$  est convergente. **COURS**

6. a Montrons que la suite  $(v_n)$  est arithmétique

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2}} = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3}$$

$$\text{d'autre part } v_n + \frac{1}{3} = \frac{1}{u_n - 1} + \frac{1}{3} = \frac{3 + u_n - 1}{3(u_n - 1)} = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3}$$

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $v_{n+1} = v_n + \frac{1}{3}$  ainsi la suite  $(v_n)$  est arithmétique de raison  $1/3$

Autre méthode : pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2}} = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3}$$

$$\text{donc } v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 2}{3u_n - 3} - \frac{3}{3u_n - 3} = \frac{u_n - 1}{3(u_n - 1)} = \frac{1}{3} = \text{constante}$$

donc la suite  $(v_n)$  est arithmétique de raison  $1/3$

6.b Formes explicites

$\star$  la suite  $(v_n)$  est arithmétique de raison  $1/3$  et de premier terme  $v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{4}$

donc, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $v_n = v_0 + \frac{1}{3} \times n$  c'est-à-dire :  $v_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}n$ .

$\star$  On a :  $v_n = \frac{1}{u_n - 1} \Rightarrow u_n - 1 = \frac{1}{v_n}$  ( $v_n \neq 0$ )  $\Rightarrow u_n = 1 + \frac{1}{v_n}$

$$\text{Or } v_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}n = \frac{3 + 4n}{12}$$

$$\text{Donc } u_n = 1 + \frac{1}{\frac{3 + 4n}{12}}$$

$$\text{Donc } u_n = 1 + \frac{12}{3 + 4n} = \frac{4n + 15}{4n + 3}$$

6.c. Limite de  $(u_n)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (3 + 4n) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12}{3 + 4n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{12}{3 + 4n} = 1$$

donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

On retrouve bien la limite de la suite  $(u_n)$  conjecturée sur le graphique.

### EXERCICE III : (4points)

#### Restitution organisée de connaissances

**Démontrer que :** **Quels que soient les complexes  $z$  et  $z'$ , on a :  $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$**

Soient  $z$  et  $z'$  deux nombres complexes quelconques.

Il existe alors des nombres **réels**  $x, x', y$  et  $y'$  tels que  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$ .

D'une part :

$$\overline{z \times z'} = \overline{(x + iy)(x' + iy')} = \overline{xx' + ixy' + iyx' - yy'} = \overline{xx' - yy' + i(xy' + yx')}$$

Or  $xx' - yy'$  réel et  $xy' + yx'$  réel

$$\text{Donc } \overline{z \times z'} = xx' - yy' + i(-xy' - yx')$$

D'autre part :

$$\bar{z} \times \bar{z}' = (x - iy)(x' - iy') = xx' - ixy' - iyx' - yy' = xx' - yy' + i(-xy' - yx')$$

$$\text{Donc } \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$$

**Ainsi, quels que soient les complexes  $z$  et  $z'$ , on a :  $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$ .**

#### Vrai -Faux

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$ .

1. On considère les points  $A, B, C$  d'affixes respectives :

$$a = 2 + 2i \quad b = -\sqrt{3} + i \quad c = 1 + i\sqrt{3}$$

**Affirmation 1 : les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés :**

$$z_{\overline{AB}} = z_B - z_A = -\sqrt{3} + i - (2 + 2i) = -(\sqrt{3} + 2) - i$$

$$z_{\overline{AC}} = z_C - z_A = 1 + i \times \sqrt{3} - (2 + 2i) = 1 + i \times \sqrt{3} - 2 - 2i = -1 + i(\sqrt{3} - 2)$$

Première Méthode :

Cherchons s'il existe un réel  $k$  tel que  $z_{\overline{AC}} = k \times z_{\overline{AB}}$  :

$$z_{\overline{AC}} = k \times z_{\overline{AB}} \Leftrightarrow -1 + i(\sqrt{3} - 2) = k(-(\sqrt{3} + 2) - i)$$

$$\Leftrightarrow -1 + i \times \sqrt{3} - 2i = -k(\sqrt{3} + 2) - ik \Leftrightarrow -1 + k \times (\sqrt{3} + 2) + i(\sqrt{3} - 2 + k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 + k(\sqrt{3} + 2) = 0 \\ \sqrt{3} - 2 + k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}-2}{3-4} = -(\sqrt{3}-2) = -\sqrt{3}+2 \\ k = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Donc  $z_{\overline{AC}} = (2 - \sqrt{3}) \times z_{\overline{AB}}$  donc les vecteurs  $\overline{AB}$  et  $\overline{AC}$  sont colinéaires donc les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés donc **l'affirmation 1 est vraie**

**Deuxième Méthode :** Observez les affixes :  $-1 \times (\sqrt{3} + 2) = -\sqrt{3} - 2$

Validez votre observation-conjecture :

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + 2) \times z_{\overline{AC}} &= (\sqrt{3} + 2) \times (-1 + i(\sqrt{3} - 2)) = -\sqrt{3} - 2 + i(\sqrt{3} - 2)(\sqrt{3} + 2) \\ &= -\sqrt{3} - 2 + i(\sqrt{3}^2 - 2^2) = -\sqrt{3} - 2 - i = z_{\overline{AB}} \end{aligned}$$

Troisième Méthode : avec les coordonnées des vecteurs

$$\overline{AB} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} - 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} - 2 \end{pmatrix} :$$

$$x_{\overline{AB}} \times y_{\overline{AC}} - y_{\overline{AB}} \times x_{\overline{AC}} = -(\sqrt{3} + 2)(\sqrt{3} - 2) - 1 = -(3 - 4) - 1 = 0$$

**2. Affirmation 2 :** L'ensemble des points  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie l'égalité  $|z - i| = |z + 1|$  est une droite.

En notant  $z_A = i$  l'affixe de  $A$   $z_B = -1$  celle de  $B$  et  $z$  celle de  $M$ :

$$|z - i| = |z + 1| \Leftrightarrow |z - i| = |z - (-1)| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$$

Donc l'ensemble des points  $M$  dont l'affixe  $z$  vérifie l'égalité  $|z - i| = |z + 1|$  est la médiatrice du segment  $[AB]$  donc c'est bien une droite.

**donc l'affirmation 2 est vraie**

**3. Affirmation 3 :** Le nombre complexe  $(1 + i\sqrt{3})^4$  est un nombre réel.

$$(1 + i\sqrt{3})^4 = [(1 + i\sqrt{3})^2]^2 = (1 + 2i\sqrt{3} - 3)^2 = (-2 + 2i\sqrt{3})^2$$

$$= 4(1 - i\sqrt{3})^2 = 4(1 - 2i\sqrt{3} - 3) = -8 - 8i\sqrt{3}$$

$$\text{Or } \text{Im}(1 + i\sqrt{3})^4 = -8\sqrt{3} \neq 0$$

Donc le nombre complexe  $(1 + i\sqrt{3})^4$  n'est pas un nombre réel.

**donc l'affirmation 3 est fausse**

**EXERCICE IV :** (5points) d'après 2005 Asie

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue  $z$  suivante :

$$z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i = 0$$

**I. Résolution de l'équation (E) :**

1. Montrer que  $-i$  est solution de (E).

$$(-i)^3 + (-8 + i)(-i)^2 + (17 - 8i)(-i) + 17i$$

$$= i + 8 - i - 17i - 8 + 17i = 0.$$

Donc  $(-i)$  est solution de l'équation.

2. Soit  $z$  de  $\mathbb{C}$ , on a :

$$(z + i)(z^2 - 8z + 17)$$

$$= z^3 - 8z^2 + 17z + iz^2 - 8iz + 17i$$

$$= z^3 + (-8 + i)z^2 + (17 - 8i)z + 17i$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

$$(E) \Leftrightarrow (z + i)(z^2 - 8z + 17) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z + i) = 0 \text{ ou } (z^2 - 8z + 17) = 0.$$

$$\text{Pour } z^2 - 8z + 17 : \Delta = -4 = (2i)^2. z_1 = \frac{8+2i}{2} = 4 + i \text{ et } z_2 = \frac{8-2i}{2} = 4 - i$$

$$(E) \Leftrightarrow z = -i \text{ ou } z = 4 + i \text{ ou } z = 4 - i$$

**Ainsi les solutions de l'équation sont  $-i ; 4 + i ; 4 - i$**

**II.** On appelle  $A, B, C$  les points d'affixes respectives  $4 + i, 4 - i, -i$ .

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.

2. Démontrer que les points  $A, B, C$  appartiennent à un même cercle ( $\mathcal{C}$ ) dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer ( $\mathcal{C}$ ).

On trace les médiatrices des cordes  $[AC]$  et  $[AB]$  du cercle et on obtient qu'elles se coupent en  $\Omega$  d'affixe 2.

$$\Omega A = |z_A - z_\Omega| = |4 + i - 2| = |2 + i| = \sqrt{5}$$

$$\Omega B = |z_B - z_\Omega| = |4 - i - 2| = |2 - i| = \sqrt{5}$$

$$\Omega C = |z_C - z_\Omega| = |-i - 2| = \sqrt{5}$$

Ainsi les points  $A, B$  et  $C$  appartiennent à un même cercle ( $\mathcal{C}$ ) de centre  $\Omega$  d'affixe 2 et de rayon  $\sqrt{5}$ .

3. À tout point  $M$  d'affixe  $z \neq 2$ , on associe le point  $M'$  d'affixe :  $z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$

3. a. Déterminer l'affixe du point  $A'$  associé au point  $A$ .

$$z_{A'} = \frac{i(4-i) + 10 - 2i}{4+i-2} = \frac{9+2i}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i} = \frac{20-5i}{5} = 4-i = z_B$$

On admet que les points  $B'$  et  $C'$  associés respectivement aux points  $B$  et  $C$  ont pour affixe :

$$z_{B'} = 4 + 3i \text{ et } z_{C'} = -4 + 3i$$

3. b. Vérifier que  $A', B', C'$  appartiennent à un cercle ( $\mathcal{C}'$ ) de centre  $P$ , d'affixe  $i$ .

$$PA' = |z_{A'} - z_P| = |4 - i - i| = |4 - 2i| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$PB' = |z_{B'} - z_P| = |4 + 3i - i| = |4 + 2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$PC' = |z_{C'} - z_P| = |-4 + 3i - i| = |-4 + 2i| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Ainsi les points  $A', B'$  et  $C'$  appartiennent à un même cercle ( $\mathcal{C}'$ ) de centre  $P$  d'affixe  $i$  et de rayon  $2\sqrt{5}$

3. c. Soit  $z \neq 2$ , on a :

$$|z' - i| = \left| \frac{iz + 10 - 2i}{z - 2} - i \right| = \left| \frac{iz + 10 - 2i - i(z - 2)}{z - 2} \right| = \left| \frac{10}{z - 2} \right| = \frac{|10|}{|z - 2|} = \frac{10}{|z - 2|}$$

3. d. Soit  $M$  un point d'affixe  $z$  appartenant au cercle ( $\mathcal{C}$ ) de centre  $\Omega$  d'affixe  $z_\Omega = 2$  et de rayon  $\sqrt{5}$ .

$M$  appartient au cercle de centre  $\Omega$  d'affixe  $z_\Omega = 2$  et de rayon  $\sqrt{5}$

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow M\Omega = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z_\Omega - z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |2 - z| = \sqrt{5} \Leftrightarrow |z - 2| = \sqrt{5}$$

Donc si  $M$  appartient au cercle de centre  $\Omega$  d'affixe  $z_\Omega = 2$  et de rayon  $\sqrt{5}$

$$\text{Alors } |z' - i| = \frac{10}{|z-2|} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$$

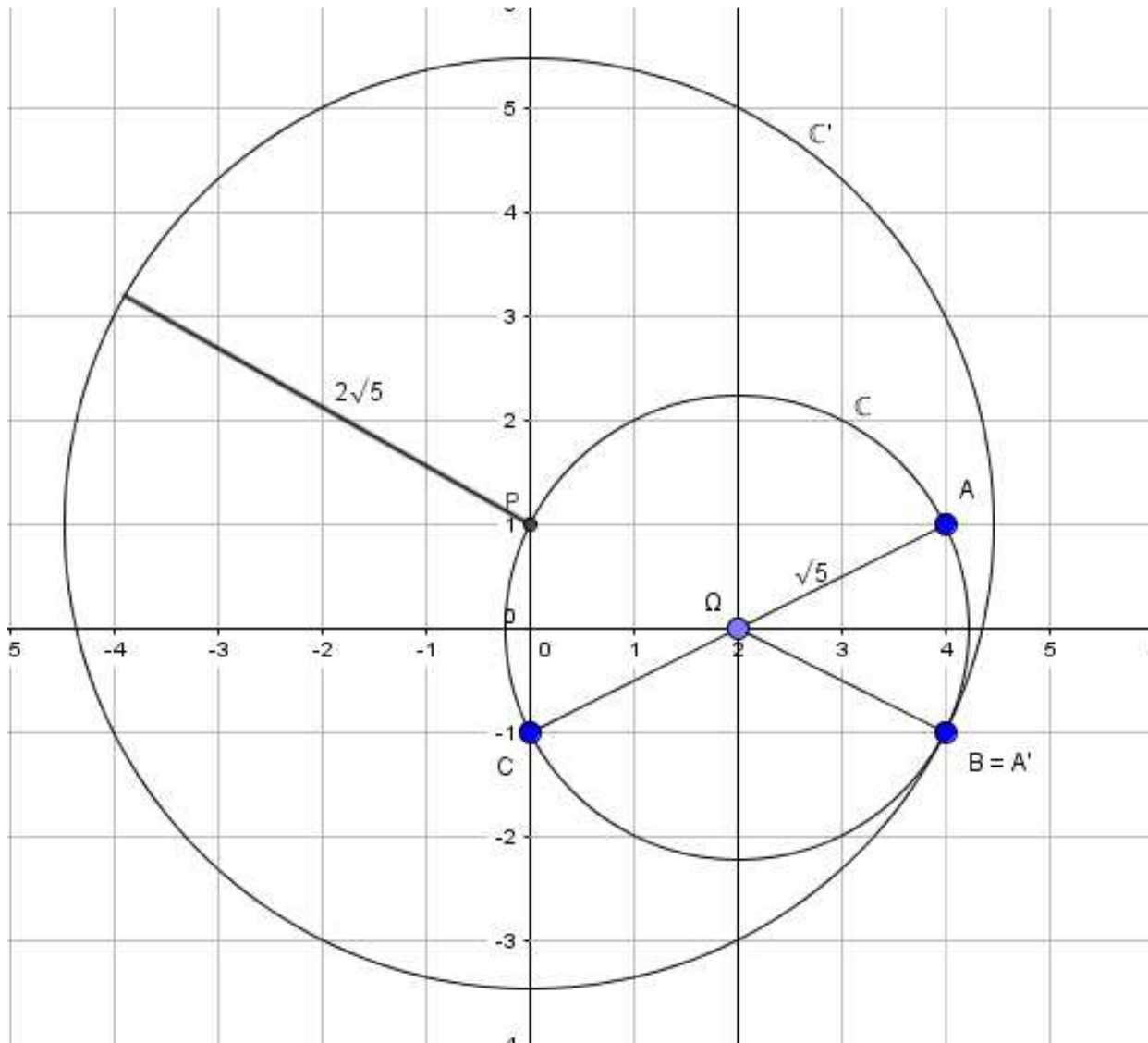
3. e. En déduire à quel ensemble appartiennent les points  $M'$  associés aux points  $M$  du cercle ( $\mathcal{C}$ ).

Soit  $M$  un point d'affixe  $z$  appartenant au cercle ( $\mathcal{C}$ ) de centre  $\Omega$  d'affixe  $z_\Omega = 2$  et de rayon  $\sqrt{5}$ .

$$\text{Alors d'après la question précédente } |z' - i| = 2\sqrt{5}$$

$$\text{Donc } M'P = 2\sqrt{5}$$

**Donc  $M'$  appartient au cercle ( $\mathcal{C}'$ ) de centre  $P$  d'affixe  $i$  et de rayon  $2\sqrt{5}$ .**



### Remarques

Pour démontrer que les points A, B, C sont sur un même cercle de centre I, il suffit de tester l'égalité des longueurs  $IA=IB=IC$ . On peut toujours conjecturer le centre du cercle sur la figure.

De plus la q3d donnait la réponse à la q2

Ne confondez pas :

$AB$  c'est une longueur et  $[AB]$  c'est un segment

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} !!!! \quad \text{et non pas } \sqrt{a^2 + i^2 b^2}$$

**Partie 1 (12points : 2+3+1+4.5+1.5)** Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0 ; +\infty[$  par  $g(x) = e^x - xe^x + 1$ .

1. Limite de  $g$  en  $+\infty$ .  $g(x) = e^x - xe^x + 1 = e^x(1 - x) + 1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(1 - x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x(1 - x) + 1 = -\infty$$

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

2. **Dérivée** :  $g$  est dérivable sur  $[0 ; +\infty[$  comme somme et produit de fonctions dérivables sur  $[0 ; +\infty[$

Pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$

$$g'(x) = e^x - (1 \times e^x + e^x \times x) + 0 = e^x - (e^x + xe^x) = -xe^x$$

**Signe de la dérivée :**

0	0	$+\infty$
$-x$	0	-
$e^x$		+
$g'(x)$	0	-

$e^x > 0$  sur  $\mathbb{R}$ , donc sur  $[0 ; +\infty[$

Ainsi, la fonction  $g$  est strictement décroissante sur  $[0 ; +\infty[$

**3. Tableau de variations de  $g$ .**

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$g'(x)$	0	-	
$g(x)$	2		$-\infty$

**4. a. Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet sur  $[0 ; +\infty[$  une unique solution.**

D'après son tableau de variations, la fonction  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $[0 ; +\infty[$

Donc  $g$  est une bijection de  $[0 ; +\infty[$  sur son image  $] -\infty ; 2]$

De plus  $0 \in ] -\infty ; 2]$  donc l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution dans  $[0 ; +\infty[$ , on la note  $\alpha$ .

**4. b.** À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  de  $\alpha$ .

$x$	$g(x)$
1,27	+0.03857
$\alpha$	0
1,28	-0.0071

D'où  $1,27 < \alpha < 1,28$  est un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,01.

**4. c. Démontrer que  $e^\alpha = \frac{1}{\alpha-1}$**

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow e^\alpha - \alpha e^\alpha + 1 \Rightarrow e^\alpha(1 - \alpha) + 1 = 0 \Rightarrow e^\alpha(1 - \alpha) = -1 \Rightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha-1}$$

**5. Signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .**

D'après le tableau de variations de  $g$  complété avec  $\alpha$  unique solution de l'équation  $g(x) = 0$ , on a :

$x$	0	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

**Partie 2 : (4)** Soit  $A$  la fonction définie et dérivable sur  $[0 ; +\infty[$  telle que  $A(x) = \frac{4x}{e^x+1}$ .

**1° Dérivée de  $A$  :**

Pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$  :

$$A'(x) = \frac{4 \times (e^x + 1) - e^x \times 4x}{(e^x + 1)^2} = \frac{4(e^x + 1 - xe^x)}{(e^x + 1)^2} = \frac{4g(x)}{(e^x + 1)^2}$$

**2° Variations de la fonction A sur [0 ; +∞[.**

Signe de A'(x) :

Pour tout x de [0 ; +∞ [ :  $e^x > 0 \Rightarrow (e^x + 1)^2 > 0$ , or  $4 > 0$  donc  $\frac{4g(x)}{(e^x+1)^2}$  est du signe de g(x)

Ainsi A'(x) a le même signe que g(x) sur [0 ; +∞ [

La question 5 de la partie 1 donne le signe de g(x) donc celui de A'(x)

x	0	α	+∞
A'(x)	+	0	-

On en déduit : la fonction A est strictement décroissante sur [0 ; α] et strictement croissante sur [α ; +∞[

**Partie 3 (4)** On considère la fonction f définie sur [0 ; +∞[ par  $f(x) = \frac{4}{e^x+1}$ . On note (C) sa courbe  
 Pour tout réel x positif ou nul, M (x ; f(x)), P (x ; 0), Q (0 ; f(x)).

**1. Démontrer que l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.**

☺ Vous devez d'abord exprimé l'aire du rectangle pour un point M quelconque d'abscisse x, puis optimiser cette aire.

P (x ; 0), et  $x \geq 0$  donc  $OP = x$

Q (0 ; f(x)) et  $f(x) \geq 0$  pour tout x de [0 ; +∞[ donc  $OQ = f(x)$

$$A_{OPMQ} = OP \times OQ = x \times f(x) = x \times \frac{4}{e^x + 1} = \frac{4x}{e^x + 1} = A(x)$$

On a étudié les variations de A à la partie 2, la fonction A admet sur [0 ; +∞[ un maximum pour  $x = \alpha$ .  
 Ainsi l'aire du rectangle OPMQ est maximale lorsque M a pour abscisse α.

**2. Le point M a pour abscisse α.**

La tangente (T) en M à la courbe (C) est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

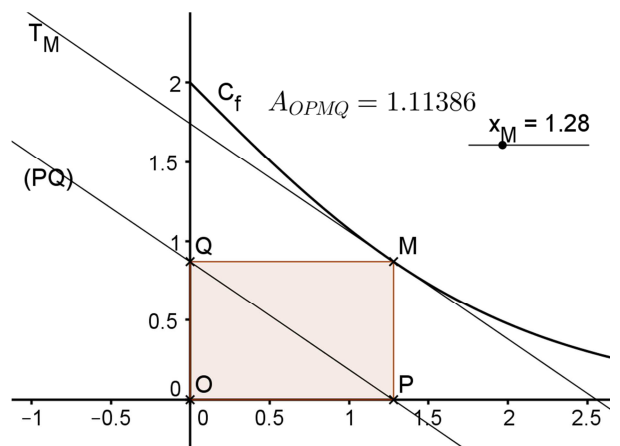
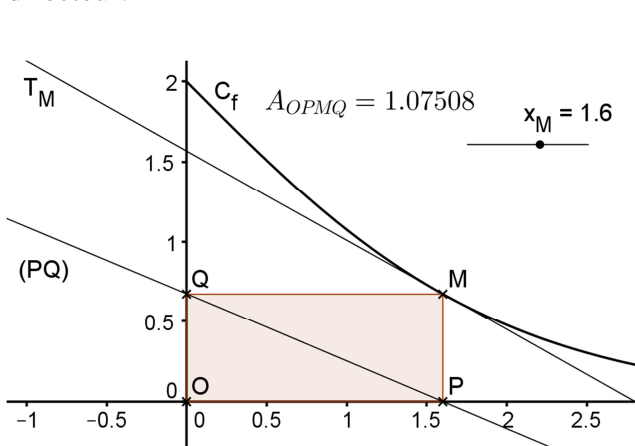
P (x ; 0), Q (0 ; f(x)). Le coefficient directeur de la droite (PQ) est :

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(\alpha) - 0}{0 - \alpha} = -\frac{f(\alpha)}{\alpha} = -\frac{\frac{4}{e^\alpha + 1}}{\alpha} = -\frac{4}{\alpha(e^\alpha + 1)} = -\frac{4}{\alpha\left(\frac{1}{\alpha-1} + 1\right)} = -\frac{4}{\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)} = -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$$

Le coefficient directeur de la tangente en M : f'(α) avec  $f'(x) = 4 \times \frac{-e^x}{(e^x+1)^2}$

$$f'(\alpha) = 4 \times \frac{-e^\alpha}{(e^\alpha + 1)^2} = -4 \times \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha-1} + 1\right)^2} = -4 \times \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2} = -4 \times \frac{1}{\alpha-1} \times \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha^2} = -\frac{4(\alpha-1)}{\alpha^2}$$

Ainsi la tangente (T) en M à la courbe (C) est parallèle à la droite (PQ), elles ont le même coefficient directeur.



**EXERCICE I : (5 points)** Commun à tous les candidats *d'après Antilles Juin 2014*

1 : 0.75      2 : 0.5      3-4 : 1      5 : 1.75      6 : 1

☺ L'énoncé précise que les fonctions  $g$  et  $f$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$

**Partie A :**  $g(x) = 1 - x + e^x$   $D = \mathbb{R}$

**1° Dérivée**

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$   $g'(x) = -1 + e^x$

**Signe de  $g'(x)$**

$$-1 + e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$-1 + e^x > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

Tableau de variation

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$g'(x)$		-	0
$g(x)$			

Image :  
 $g(0) = 1 - 0 + e^0 = 2$

**Signe de  $g(x)$**  Le minimum de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$  est 2, or  $2 > 0$

On en déduit  $g(x) > 0$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$

2°  $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$   $D = \mathbb{R}$

**Limite en  $-\infty$**

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x} = x + 1 + x \times \frac{1}{e^x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} x \times \frac{1}{e^x} = -\infty$$

De plus  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$

Donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 + x \times \frac{1}{e^x} = -\infty$

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

**Limite en  $+\infty$**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty (C. comparée) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x + 1 + \frac{x}{e^x} \right) = +\infty$$

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

3° Dérivée Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 1 + \frac{(1 \times e^x - e^x \times x)}{(e^x)^2} = 1 + \frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = 1 + \frac{1-x}{e^x} = \frac{e^x + 1 - x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}$$

On obtient bien :  $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x} = e^{-x} \times g(x)$

4° Signe de  $f'(x)$

$e^{-x} > 0$  sur  $\mathbb{R}$ , donc  $f'(x)$  le même signe que  $g(x)$ . Or d'après la q1 :  $g(x) > 0$  sur  $\mathbb{R}$

Tableau des variations de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-1$	$\alpha$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$	+				
$f$					

5° a) Equation  $f(x) = 0$

$f$  est **continue** et **strictement croissante** sur  $] -\infty ; +\infty[$ ,

donc  $f$  réalise une bijection de  $] -\infty ; +\infty[$  sur son intervalle image  $] -\infty ; +\infty[$ .

Or  $0 \in ] -\infty ; +\infty[$

donc d'après le **théorème de la bijection** l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $a$  dans l'intervalle  $] -\infty ; +\infty[$

b) Encadrement  $f(-1) \approx -2,718 < 0$  et  $f(0) = 1 > 0$  donc  $a \in ] -1 ; 0[$  ainsi  $-1 < a < 0$

c)

	étape 1	étape 2	Etape 3	Etape 4	Etape 5
$a$	$-1$	$-0.5$	$-0.5$	$-0.5$	$-0.4375$
$b$	$0$	$0$	$-0.25$	$-0.375$	$-0.375$
$b-a$	$1$	$0.5$	$0.25$	$0.125$	$0.0625$ arrêt
$m$	$-0.5$	$-0.25$	$-0.375$	$-0.4375$	

Les valeurs affichées par cet algorithme sont  $a = -0,4375$   $b = -0,375$ .

Cela signifie que  $\alpha \in [-0,4375 ; -0,375]$  intervalle d'amplitude inférieur ou égal à 0,1 obtenu en appliquant la méthode de dichotomie sur  $[-1 ; 0]$

6° Tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $0$  :

$$y = f'(0) \times (x - 0) + f(0) \quad f'(0) = 2 \quad f(0) = 1$$

$$y = 2x + 1 \quad \text{On obtient l'équation de } T \text{ demandée : } y = 2x + 1$$

6° b) Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$

$$f(x) - (2x + 1) = \left(x + 1 + \frac{x}{e^x}\right) - (2x + 1) = -x + \frac{x}{e^x} = \frac{-xe^x + x}{e^x} = \frac{-x(e^x - 1)}{e^x} = \frac{-x \times g'(x)}{e^x}$$

Signe de  $f(x) - (2x + 1)$

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$-x$		+	-
$g'(x)$		-	0
$e^x$		+	+

Cf 1°

$e^x > 0$  sur  $\mathbb{R}$

$f(x) - (2x + 1)$	-	0	-
-------------------	---	---	---

On en déduit :  $C_f$  est en dessous de  $T$  sur  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$   $C_f$  coupe  $T$  au point d'abscisse 0

**EXERCICE II : (5 points) Commun à tous les candidats****1 : 1      2 : 1      QCM : 0.75+0.75+0.75+0.75****1° Affirmation 1 : VRAI**

$$u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{2^n}{3^n(1+\frac{1}{3^n})} = \frac{2^n}{3^n} \frac{1}{(1+\frac{1}{3^n})} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{(1+\frac{1}{3^n})}$$

Or  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^n} = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{3^n} = 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{3^n}} = 1$ .

De plus  $-1 < \frac{2}{3} < 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ .

Puis par produit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1}{(1+\frac{1}{3^n})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

**Donc la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$  converge vers 0**

**Affirmation 2 : FAUX**

On a pour tout réel  $x \geq 1$ ,  $0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{x}$

donc  $0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}$  car  $x$  est positif donc  $\sqrt{x}$  existe.

donc  $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$  et comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 0 = 0$

**Alors d'après le théorème des gendarmes  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$**

**2°. Question 1.**

$$f'(x) = (-1)e^{-x} + (2-x)(-e^{-x}) = (-1-(2-x))e^{-x} = (-1-2+x)e^{-x} = (x-3)e^{-x}$$

**Donc  $\textcircled{3} f'(x) = (x-3)e^{-x}$**

**Question 2.** Soit  $z_1 = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$  et  $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .

$$\begin{aligned} i \frac{z_1}{z_2} &= i \frac{\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} \times e^{i\frac{\pi}{4}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3} \frac{e^{i(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \sqrt{3} e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \sqrt{3} e^{i\left(\frac{6\pi+3\pi+4\pi}{12}\right)} = \sqrt{3} e^{i\left(\frac{13\pi}{12}\right)} \end{aligned}$$

**Donc  $\textcircled{4} \sqrt{3} e^{i\frac{13\pi}{12}}$**

**Question 3.** On pose  $z = x + iy$  avec  $x ; y$  réels

donc  $-z = \bar{z} \Leftrightarrow -(x + iy) = x - iy$

$$\Leftrightarrow -x - iy = x - iy$$

$$\Leftrightarrow -2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \text{Re}(z) = 0$$

$\Leftrightarrow z$  est un imaginaire pur

$\Leftrightarrow M$  d'affixe  $z$  se situe sur l'axe des ordonnées.

**Donc ③ Une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.**

**Question 4.**

Graphiquement la fonction  $f'$  est positive sur  $] -\infty ; 2]$  et négative sur  $[2 ; +\infty [$ .

Ainsi la fonction  $f$  est croissante sur  $] -\infty ; 2]$  et décroissante sur  $[2 ; +\infty [$ .

Ceci exclue les courbes  $C_1$  et  $C_4$ .

De plus, toujours avec la représentation graphique de  $C'$ , on constate que  $f'(0) = 2$  ce qui convient à la courbe  $C_3$  mais pas à la courbe  $C_2$  pour laquelle graphiquement on voit que  $f'(0) \approx 1$ .

**Donc ③  $C_3$**

**EXERCICE III : (5 points) NON SPECIALITE** *d'après Centres étrangers Juin 2014*

**1 : 2      2 : 1.25      3 : 0.5      4 : 1.25**

On définit, pour tout entier naturel  $n$ , les nombres complexes  $z_n$  par :

$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

On note  $r_n$  le module du nombre complexe  $z_n$   $r_n = |z_n|$ .

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine  $O$ , on considère les points  $A_n$  d'affixes  $z_n$ .

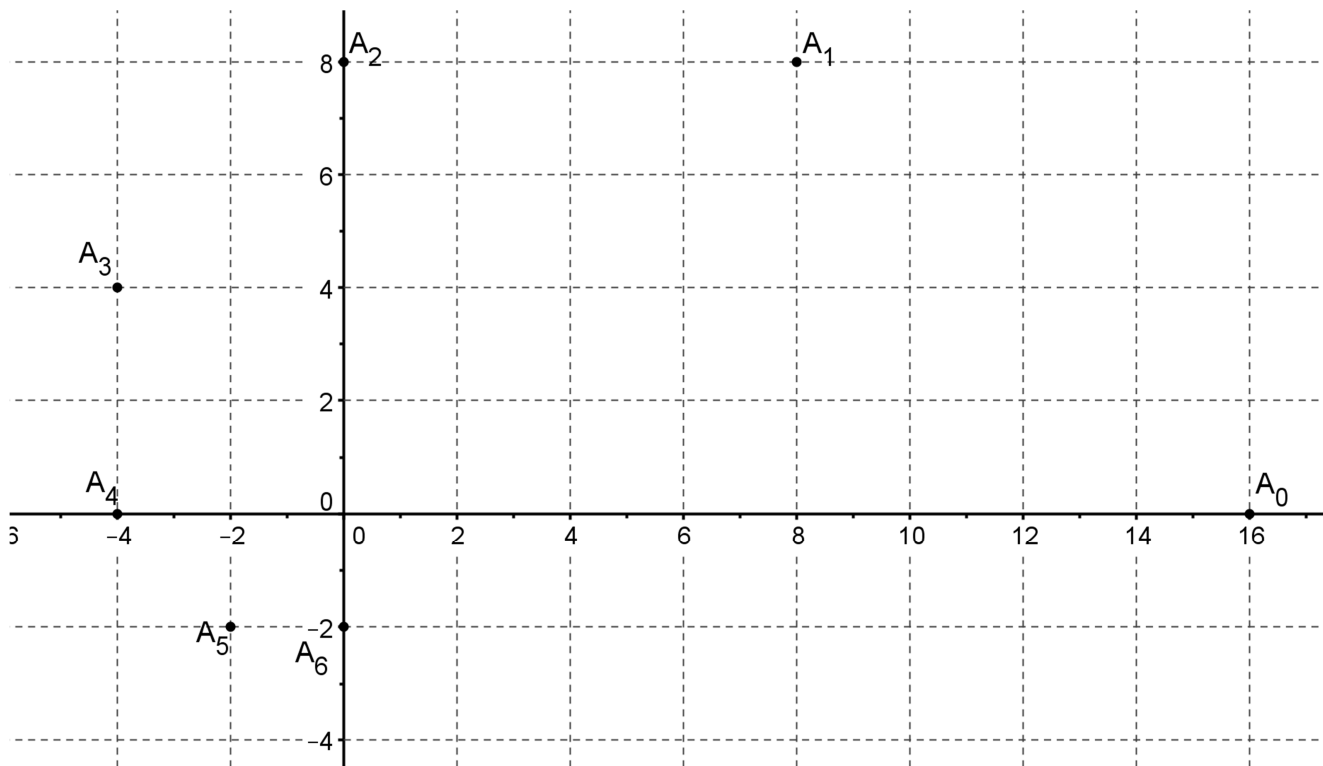
**1. a.** Calculer  $z_1$  ;  $z_2$  et  $z_3$  :

$$z_1 = \frac{1+i}{2} \times z_0 = \frac{1+i}{2} \times 16 = 8(1+i) = 8 + 8i$$

$$z_2 = \frac{1+i}{2} \times z_1 = \frac{1+i}{2} \times (8 + 8i) = (4 + 4i)(1+i) = 4 + 4i + 4i - 4 = 8i$$

$$z_3 = \frac{1+i}{2} \times 8i = 4i(1+i) = -4 + 4i$$

**1. b.** Placer les points  $A_1$  et  $A_2$  dans le plan ci-dessous.



1. c. Écrire le nombre complexe  $\frac{1+i}{2}$  sous forme trigonométrique

$$\frac{1+i}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \times \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \times \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

1. d. Démontrer que le triangle  $OA_0A_1$  est rectangle et isocèle en  $A_1$  :

$$OA_0 = |z_0| = |16| = 16$$

$$OA_1 = |z_1| = |8 + 8i| = \sqrt{8^2 + 8^2} = \sqrt{128} = 8 \times \sqrt{2}$$

$$A_0A_1 = |z_1 - z_0| = |8 + 8i - 16| = |-8 + 8i| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2} = 8 \times \sqrt{2}$$

On a  $OA_1 = A_0A_1$  donc le triangle  $OA_0A_1$  est isocèle en  $A_1$ .

De plus,  $OA_1^2 + A_0A_1^2 = 128 \times 2 = 256 = 16^2 = OA_0^2$  donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle  $OA_0A_1$  est rectangle en  $A_1$ .

**Conclusion :** le triangle  $OA_0A_1$  est rectangle et isocèle en  $A_1$ .

2. Démontrer que la suite  $(r_n)$  est géométrique, de raison  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}: r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left| \frac{1+i}{2} \times z_n \right| = \left| \frac{1+i}{2} \right| \times |z_n| = \frac{\sqrt{2}}{2} \times r_n$$

Donc la suite  $(r_n)$  est géométrique de raison  $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$  et de premier terme  $r_0 = |z_0| = 16$ .

La suite  $(r_n)$  est-elle convergente ?

$$\text{On en déduit donc que pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, r_n = r_0 \times q^n = 16 \times \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n.$$

Comme  $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$  alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 16 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$$

Interpréter géométriquement le résultat précédent :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} OA_n = 0$  donc cela signifie que la limite du point  $A_n$  est le point O.

**3. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $A_n A_{n+1} = r_{n+1}$**

Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$A_n A_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = \left| \frac{1+i}{2} z_n - z_n \right| = \left| z_n \left( \frac{1+i}{2} - 1 \right) \right| = \left| z_n \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \right) \right| = |z_n| \times \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$A_n A_{n+1} = |z_n| \times \frac{\sqrt{2}}{2} = |z_{n+1}| = r_{n+1}$$

4. On note  $L_n$  la longueur de la ligne brisée qui relie le point  $A_0$  au point  $A_n$  en passant successivement par les points  $A_1, A_2, A_3, \dots$

Ainsi :

$$L_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} A_k A_{k+1} = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$$

**4. a. Donner une expression de  $L_n$  en fonction de  $n$  :**

$$L_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} A_k A_{k+1} = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n = r_1 + \dots + r_n$$

$L_n$  est la somme des  $n$  termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$  avec  $\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$

et de premier terme  $r_1 = |z_1| = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$  donc :

$$L_n = \text{Premier terme de la somme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q} = 8 \times \sqrt{2} \times \frac{\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{16\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \times \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right) = \frac{16 \times \sqrt{2} \times (2 + \sqrt{2})}{4 - 2} \times \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right) \\ &= 8 \times \sqrt{2} \times (2 + \sqrt{2}) \times \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right) \end{aligned}$$

$$L_n = 16(\sqrt{2} + 1) \times \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)$$

**4. b. Déterminer la limite éventuelle de la suite  $(L_n)$ .**

Comme  $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$  alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right) = 1 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 16(\sqrt{2} + 1) \times \left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right) = 16(\sqrt{2} + 1)$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n = 16(\sqrt{2} + 1)$$

**Interprétation géométrique :**

La limite de la longueur de la ligne brisée  $L_n$  est égale à  $16(\sqrt{2} + 1)$ .

**EXERCICE IV : (5 points)**      **Commun à tous les candidats**      *d'après La réunion Juin 2008*

**1. 1.25      2a : 0.5      2b : 1      2c : 1.25      2d : 1**

1. On considère la suite arithmétique  $(v_n)$  de raison 8 et de premier terme  $v_0 = 16$

On considère un entier  $n \geq 1$

1. a. Exprimer  $v_{n-1}$  en fonction de  $n$

$$v_{n-1} = v_0 + (n-1) \times 8 = 16 + (n-1) \times 8$$

$$v_{n-1} = 8n + 8$$

1. b. Justifier que la somme des  $n$  premiers termes de la suite  $(v_n)$  est égale à  $4n^2 + 12n$ .

La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique, est :

$$S = \frac{nb \text{ termes}(1^{\text{er}} + \text{dernier terme de la somme})}{2}$$

Pour avoir  $n$  termes, il faut **sommer de  $v_0$  à  $v_{n-1}$**  :

avec  $v_0 = 16$

$$v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = \frac{n}{2}(v_0 + v_{n-1}) = \frac{n}{2}(16 + 8n + 8) = \frac{n}{2}(24 + 8n) = n(12 + 4n)$$

$$\text{donc } \sum_{i=0}^{i=n-1} v_i = 12n + 4n^2$$

2. On considère la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $u_0 = 5$  et, pour tout entier  $n \geq 0$ ,

$$u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)u_n + \frac{6}{n+1}$$

2. a. Calculer  $u_1$ .

$$u_1 = \left(1 + \frac{2}{0+1}\right)u_0 + \frac{6}{0+1} = (3) \times 5 + 6 = 21$$

$$u_2 = \left(1 + \frac{2}{1+1}\right)u_1 + \frac{6}{1+1} = (2) \times 21 + 3 = 45 \text{ non demandé mais permet de vérifier la logique du tableau}$$

2. b. Les valeurs de  $u_2$  à  $u_{11}$  sont données ci-dessous :

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$u_n$	45	77	117	165	221	285	357	437	525	621

$$d_0 = u_1 - u_0 = 21 - 5 = 16$$

$$d_1 = u_2 - u_1 = 45 - 21 = 24 = 16 + 8$$

$$d_2 = u_3 - u_2 = 77 - 45 = 32 = 24 + 8 \quad d_3 = u_4 - u_3 = 117 - 77 = 40 = 32 + 8$$

$$d_4 = u_5 - u_4 = 165 - 117 = 48 = 40 + 8$$

On observe que ces termes calculés se déduisent du précédent en ajoutant le réel 8

On peut conjecturer que la suite  $(d_n)$  est arithmétique de raison 8, de premier terme  $d_0 = 16$ .

2. c. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $u_n = 4n^2 + 12n + 5$  ( $P_n$ )

1<sup>ère</sup> étape : Initialisation :  $n = 0$

On a  $u_0 = 5$

D'autre part  $4 \times 0^2 + 12 \times 0 + 5 = 5$  donc  $u_0 = 4 \times 0^2 + 12 \times 0 + 5$  est vrai

l'égalité est vraie pour  $n = 0$  :  $P_0$  est vraie

2<sup>ème</sup> étape : hérédité

(H.R.) On suppose que pour UN certain entier  $n$  arbitrairement fixé dans  $\mathbb{N}$ ,  $u_n = 4n^2 + 12n + 5$

et on prouve que  $u_{n+1} = 4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5$

Par hypothèse de récurrence,  $u_n = 4n^2 + 12n + 5$  et par l'énoncé  $u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)u_n + \frac{6}{n+1}$

Donc

$$\begin{aligned}u_{n+1} &= \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)(4n^2 + 12n + 5) + \frac{6}{n+1} \\u_{n+1} &= 4n^2 + 12n + 5 + \frac{8n^2 + 24n + 10}{n+1} + \frac{6}{n+1} \\u_{n+1} &= 4n^2 + 12n + 5 + \frac{8n^2 + 24n + 16}{n+1} \\u_{n+1} &= \frac{4n^3 + 12n^2 + 5n + 4n^2 + 12n + 5 + 8n^2 + 24n + 16}{n+1} \\u_{n+1} &= \frac{4n^3 + 24n^2 + 41n + 21}{n+1}\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}(4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5)(n+1) &= (4n^2 + 8n + 4 + 12n + 12 + 5)(n+1) \\&= (4n^2 + 20n + 21)(n+1) = \\&= 4n^3 + 4n^2 + 20n^2 + 20n + 21n + 21 \\&= 4n^3 + 24n^2 + 41n + 21\end{aligned}$$

Donc

$$u_{n+1} = \frac{(4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5)(n+1)}{n+1}$$

$$u_{n+1} = 4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5$$

**donc  $P_n$  vraie entraîne  $P_{n+1}$  vraie**

### Conclusion :

La propriété est initialisée pour  $n=0$  et héréditaire donc d'après le principe de récurrence,  
**pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $u_n = 4n^2 + 12n + 5$**

**2. d.** Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $d_{n+1} - d_n$  est constante

$$\begin{aligned}\star \text{ Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} : d_n &= u_{n+1} - u_n \\&= 4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5 - (4n^2 + 12n + 5) \\&= (4n^2 + 20n + 21) - (4n^2 + 12n + 5) \\&= 8n + 16\end{aligned}$$

$\star$  Montrons que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $d_{n+1} - d_n = 8$

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a :  $d_{n+1} - d_n = 8(n+1) - 16 - (8n - 16) = 8$  c'est bien une constante  
Ainsi la suite  $(d_n)$  est arithmétique de raison 8, ce qui confirme notre conjecture.

### **Autre méthode**

Pour tout entier naturel  $n$ ,

$$\begin{aligned}d_{n+1} - d_n &= (u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) \\&= u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n \\&= 4(n+2)^2 + 12(n+2) + 5 - 2[4(n+1)^2 + 12(n+1) + 5] + 4n^2 + 12n + 5 \\&= 4(n^2 + 4n + 4) + 12n + 24 + 5 - 2(4n^2 + 8n + 4 + 12n + 12 + 5) + 4n^2 + 12n + 5 \\&= 4n^2 + 16n + 16 + 12n + 29 - 2(4n^2 + 20n + 21) + 4n^2 + 12n + 5 \\&= 4n^2 + 28n + 45 - 8n^2 - 40n - 42 + 4n^2 + 12n + 5\end{aligned}$$

$d_{n+1} - d_n = 8 = \text{constante}$  Ainsi la suite  $(d_n)$  est arithmétique de raison 8, ce qui confirme notre conjecture.

1. Construction d'un arbre pondéré associé à cette situation.

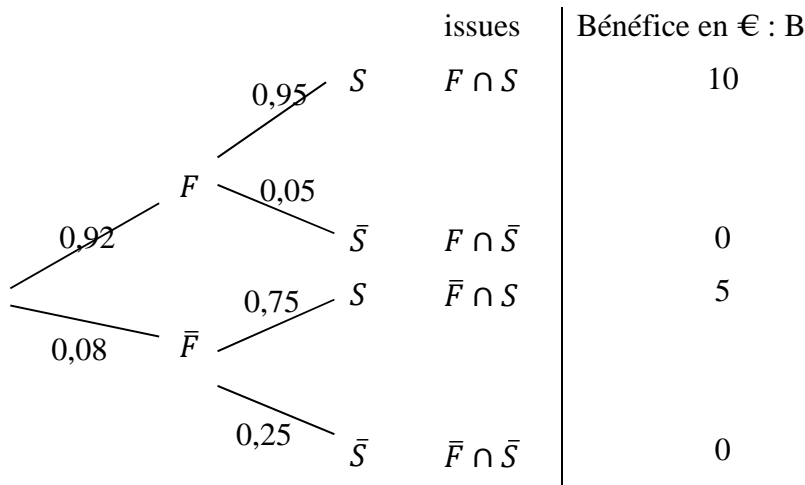
1.a. Traduire les données de l'énoncé en utilisant les notations des probabilités.

$$p(F) = 0,92 ; p_F(S) = 0,95 ; p(\bar{F} \cap \bar{S}) = 0,02$$

1.b. Démontrer que  $p_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{1}{4}$ .

$$p_{\bar{F}}(\bar{S}) = \frac{p(\bar{F} \cap \bar{S})}{p(\bar{F})} = \frac{0,02}{1 - p(F)} = \frac{0,02}{1 - 0,92} = \frac{0,02}{0,08} = \frac{1}{4}$$

1.c. Arbre pondéré correspondant à cette situation.



2. Calcul de probabilités.

2.a. S est la réunion de  $F \cap S$  et  $\bar{F} \cap S$  qui sont incompatibles

$$p(S) = p(F \cap S) + p(\bar{F} \cap S) = p(F) \times p_F(S) + p(\bar{F}) \times p_{\bar{F}}(S) = 0,92 \times 0,95 + 0,08 \times 0,75 = 0,934$$

2.b. F sachant S

$$p_S(F) = \frac{p(F \cap S)}{p(S)} = \frac{0,92 \times 0,95}{0,934} \approx 0,936$$

Sachant que le jouet a réussi le test de solidité, la probabilité qu'il soit sans défaut de finition est 0,936

3. Étude d'une variable aléatoire B.

Les jouets ayant satisfait aux deux contrôles rapportent un bénéfice de 10 euros, ceux qui n'ont pas satisfait au test de solidité sont mis au rebut, les autres jouets rapportent un bénéfice de 5 euros.

On désigne par B la variable aléatoire qui associe à chaque jouet le bénéfice rapporté.

3.a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire B.

Bénéfice B en euros	0	5	10	
Probabilité	0,066	0,06	0,874	Total 1

$$p(B = 0) = p(\bar{S}) = 1 - p(S) = 1 - 0,934 = 0,066$$

$$p(B = 10) = p(F \cap S) = 0,92 \times 0,95 = 0,874$$

$$P(B = 5) = p(\bar{F} \cap S) = 0,08 \times 0,75 = 0,06$$

**3.b.** Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire  $B$ .

$$E(B) = 0 \times 0,0066 + 5 \times 0,06 + 10 \times 0,874 = 9,04$$

L'espérance mathématique de  $B$  est égale à 9,04 euros, bénéfice moyen par jouet si le lot contient un grand nombre de jouets.

**4.** On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un lot de 10 jouets. On désigne par  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité. On suppose que la quantité fabriquée est suffisamment importante pour que la constitution de ce lot puisse être assimilée à un tirage avec remise.

La constitution du lot de 10 jouets pour tester leur solidité est assimilée à des tirages avec remise.

On répète 10 fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli

Chaque épreuve a deux issues :

$S$  l'évènement : « le jouet réussit le test de solidité » de probabilité  $p(S) = 0,934$

et son contraire  $\bar{S}$  de probabilité  $p(\bar{S}) = 1 - p(S) = 0,066$

Donc la variable aléatoire  $X$  égale au nombre de jouets de ce lot subissant avec succès le test de solidité suit une loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = 0,934$  :  $\mathcal{B}(10 ; 0,934)$

**4. a.** « tous les jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité » : ( $X = 10$ )

$$p(X = 10) = \binom{10}{10} 0,934^{10} \times 0,066^0 = 0,934^{10} \approx 0,505$$

Ainsi, la probabilité que tous les jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité est 0,505

**4. b.** La variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,934

$$E(X) = 10 \times 0,934 = 9,34$$

En moyenne, 9,34 jouets par lot subissent avec succès le test de solidité.

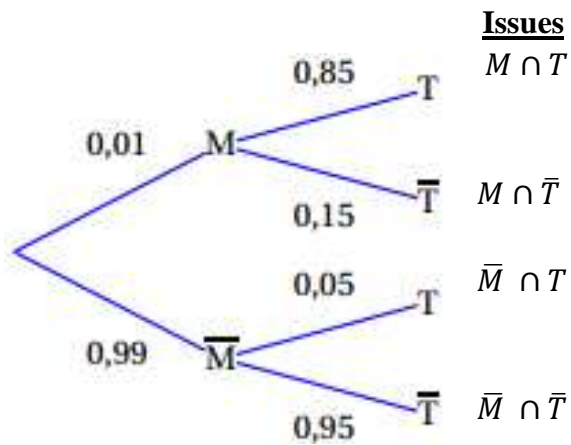
**4. c.** Calculer, à  $10^{-3}$  près par défaut, la probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité.

$$\begin{aligned} P(X \geq 8) &= p(X = 8) + p(X = 9) + p(X = 10) \\ &= \binom{10}{8} 0,934^8 \cdot 0,066^2 + \binom{10}{9} 0,934^9 \cdot 0,066^1 + \binom{10}{10} 0,934^{10} \cdot 0,066^0 \\ &= 45 \times 0,934^8 \times 0,066^2 + 10 \times 0,934^9 \times 0,066^1 + 1 \times 0,934^{10} \times 1 \\ &\approx 0,9757 \end{aligned}$$

La probabilité qu'au moins 8 jouets de ce lot subissent avec succès le test de solidité est égale à 0,975 à  $10^{-3}$  près par défaut.

**EXERCICE I :** (5points) d'après Antilles 2010 1° : 0.5 2° : 1.25 3° : 0.5 4° : 1.75 5° : 1

1. Construire un arbre pondéré modélisant la situation proposée.



2. Un animal est choisi au hasard.

2. a. Quelle est la probabilité qu'il soit porteur de la maladie et que son test soit positif ?

$$P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,01 \times 0,85 = 0,0085$$

Ainsi, la probabilité que l'animal soit porteur de la maladie et que son test soit positif est égale à 0,0085.

2. b. Les évènements  $M \cap T$  et  $\bar{M} \cap T$  forment une partition de T donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap T) \\ &= 0,0085 + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T) \\ &= 0,0085 + 0,99 \times 0,05 = 0,058 \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que le test soit positif est 0,058.

3. Un animal est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour qu'il soit porteur de la maladie ?

$$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{0,0085}{0,058} \text{ donc } P_T(M) \approx 0,1466$$

Ainsi, la probabilité pour qu'un animal choisi au hasard soit porteur de la maladie est environ égale à 0,1466.

4. On choisit cinq animaux au hasard. La taille de ce troupeau permet de considérer les épreuves comme indépendantes et d'assimiler les tirages à des tirages avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, aux cinq animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.

4. a. On répète 5 fois de manière identique et indépendante la même épreuve de Bernoulli

Pour une épreuve : deux issues :

T : « le test est positif » de probabilité 0,058 et  $\bar{T}$  de probabilité 0,942.

La variable aléatoire X comptant le nombre d'animaux ayant un test positif, suit donc la loi binomiale de paramètres  $n = 5$  et  $p = 0,058$ .

4.b  $P(X = 1) = \binom{5}{1} \times 0,058^1 \times 0,942^{5-1} = 5 \times 0,058 \times 0,942^4$  donc  $P(X = 1) \approx 0,2284$

Ainsi, la probabilité qu'exactement un animal ait un test positif est environ égale à 0,2284.

4. c. « au moins deux des cinq animaux ont un test positif » :  $(X \geq 2)$

$$\begin{aligned} P(X \geq 2) &= 1 - P(X = 0) - p(X = 1) \\ &= 1 - \binom{5}{0} \times 0,058^0 \times 0,942^5 - 5 \times 0,058 \times 0,942^4 \\ &= 1 - 0,942^5 - 5 \times 0,058 \times 0,942^4 \\ &\approx 0,0299 \end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité qu'au moins un des cinq animaux ait un test positif est environ égale à 0,0299.

5. Le coût des soins à prodiguer à un animal ayant réagi positivement au test est de 100 euros et le coût de l'abattage d'un animal non dépisté par le test et ayant développé la maladie est de 1 000 euros. On suppose que le test est gratuit.

D'après les données précédentes, la loi de probabilité du coût à engager par animal subissant le test est donnée par le tableau suivant :

Coût	0	100	1 000
Probabilité	0,9405	0,0580	0,0015

Soit  $C$  la variable aléatoire désignant le coût à engager par animal

5. a. Calculons l'espérance mathématique de la variable aléatoire associant à un animal le coût à engager.

$$E(C) = 0 \times 0,9405 + 100 \times 0,0580 + 1000 \times 0,0015 = 7,30$$

Ainsi, le coût moyen par animal est de 7,3 euros.

5. b. Un éleveur possède un troupeau de 200 bêtes.  $200 \times 7,3 = 1460$

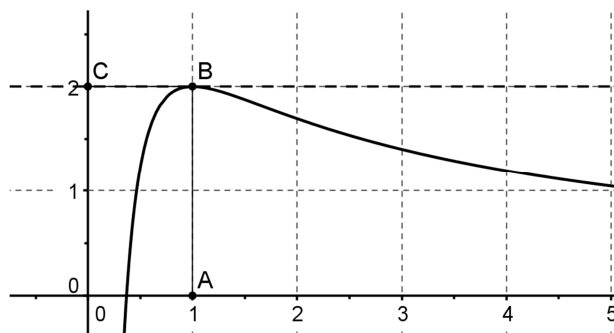
Ainsi, si tout le troupeau est soumis au test, il doit prévoir d'engager 1460 euros.

**EXERCICE II : (5 points)** TOUS d'après sujet national Juin 2013

1° 0.5+0.75    2° a)0.75    b)1    c)0.5    3° 0.5    4° :1

On dispose des informations suivantes :

- les points  $A, B, C$  ont pour coordonnées respectives  $(1; 0), (1; 2), (0; 2)$  ;
- la courbe  $C_f$  passe par le point  $B$  et la droite  $(BC)$  est tangente à  $C_f$  en  $B$  ;
- il existe deux réels positifs  $a$  et  $b$  tels que pour tout réel strictement positif  $x$ ,  $f(x) = \frac{a+b \ln x}{x}$ .



1° a)  $f(1) = 2$      $B(1; 2) \in C$

$f'(1) = 0$      $f'(1)$  est le coefficient directeur de la tangente à  $C_f$  au point  $B$  d'abscisse 1 ; cette tangente est la droite  $(BC)$  ; son coefficient directeur est 0.

1° b) Dérivée    ☺ L'énoncé vous précise que la fonction  $f$  est définie et dérivable sur  $]0; +\infty[$   
 Pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{b \times \frac{1}{x} \times x - 1 \times (a + b \ln x)}{x^2} = \frac{b - a - b \ln x}{x^2}$$

1° c) sachant que  $\ln(1) = 0$  ;  $f(1) = 2$  et  $f'(1) = 0$

$$f(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{a + b \ln 1}{1} = 2 \Leftrightarrow a = 2$$

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{b - a - b \ln 1}{1^2} = 0 \Leftrightarrow b - a = 0 \Leftrightarrow b = a$$

D'où  $a = b = 2$   $f(x) = \frac{2+2 \ln x}{x}$

**2° a) Dérivée :**

Pour tout  $x$  de  $]0 ; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{b - a - b \ln x}{x^2} \quad \text{or } a = 2 \text{ et } b = 2$$

D'où

$$f'(x) = \frac{2 - 2 - 2 \ln x}{x^2} = \frac{-2 \ln x}{x^2} = \frac{2}{x^2} (-\ln x)$$

**Signe de  $f'(x)$**

$$x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow \frac{2}{x^2} > 0$$

D'où  $f'(x)$  est du signe de  $-\ln x$

$x$	0	1	$+\infty$
-1		-	-
$\ln x$		-	0 +
$f'(x)$		+	0 -

**2b ) Limite en 0**  $f(x) = \frac{1}{x} \times (2 + 2 \ln x)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2 + 2 \ln x) = -\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} \times (2 + 2 \ln x) = -\infty$$

Ainsi

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$$

**Limite en  $+\infty$**

On modifie l'écriture de  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{2 + 2 \ln x}{x} = \frac{2}{x} + \frac{2 \ln x}{x} = \frac{2}{x} + 2 \times \frac{\ln x}{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ (Croissance comparée)} \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2}{x} + 2 \times \frac{\ln x}{x} \right) = 0$$

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

**2. c. Tableau de variation de la fonction  $f$**

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$		$-\infty$ ↗ 2 ↘	0

Image :

$$f(1) = \frac{2+2 \ln 1}{1} = 2 \quad \text{car } \ln 1 = 0$$

3. D'après son tableau de variation,

La fonction  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $[1 ; +\infty[$

donc  $f$  est une bijection de  $[1 ; +\infty[$  sur son image  $]0 ; 2]$

de plus  $1 \in ]0 ; 2]$

donc l'équation  $f(x) = 1$  admet une unique solution dans  $[1 ; +\infty[$  ; on la note  $\alpha$

4.a. On donne l'algorithme

On entre une valeur de  $P$  égale à 0,1.

Faire fonctionner l'algorithme, on fera un tableau sur la copie avec autant de colonnes que nécessaire.

	initialisation	Traitement			
		1ere étape	2 <sup>ème</sup> étape	...	
Valeur de X	5	5,1	5,2	5,3	5,4
Valeur de Y	$f(5) \approx 1,0438$	1,0311	1,0187	1,0067	0,99496
Test « tant que »	Vrai	Vrai	vrai	Vrai	Faux : ARRET

Valeurs affichées en sortie : 5,3 et 5,4

☛ Il s'agit juste de préciser les valeurs affichées, mais ne l'oubliez pas !

On en déduit un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,1 :  $5,3 \leq \alpha \leq 5,4$

4. b. On a fait fonctionner l'algorithme avec une certaine valeur de  $P$ .

On a obtenu en sortie les nombres 5,35 et 5,36.

Quelle valeur de  $P$  avait-on choisie en entrée :  $P = 0,01$

### EXERCICE III : (5points) NON SPECIALITE Amérique du Sud novembre 2015

#### Partie A

1. la population totale est constante donc pour tout entier naturel  $n, u_n + v_n = 120$ . (0,25 pt)

2. Dans B3 on entre la formule :  $=0,9*B2+0,05*C2$

Dans C3 on entre la formule  $=0,1*B2+0,95*C2$  (0,5 pt)

3. D'après les données du tableur, la suite  $(u_n)$  (donc le nombre de ruraux) semble décroître et tendre vers 40 millions, et la suite  $(v_n)$  (donc le nombre de citadins) semble croître et tendre vers 80 millions. (0,5 pt)

#### Partie B

Montrons par récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  : «  $u_n > u_{n+1}$  »

**Initialisation** : Pour  $n = 0$  :

On a  $u_0 = 90$  et  $u_1 = 0,85u_0 + 6 = 82,5$  donc  $u_0 > u_1$  donc l'inégalité est vraie pour  $n = 0$

#### Heredité

On suppose que pour un certain rang  $n$  arbitrairement fixé dans  $\mathbb{N}$ , on a  $u_n > u_{n+1}$

et on montre qu'alors  $u_{n+1} > u_{n+2}$

**On a** :  $u_n > u_{n+1}$

Donc  $0,85 \times u_n > 0,85 \times u_{n+1}$

Donc  $0,85 \times u_n + 6 > 0,85 \times u_{n+1} + 6$

Donc :  $u_{n+1} > u_{n+2}$

**Conclusion** : pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > u_{n+1}$  donc la suite  $(u_n)$  est décroissante. (0,75 pt)

1.b) On admet que  $(u_n)$  est positif pour tout entier naturel, donc la suite  $(u_n)$  est minorée par 0.

De plus, on a vu que la suite était décroissante ;

donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite  $(u_n)$  est convergente. (0,25 pt)

2 a) soit  $n$  entier naturel,

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0,85u_n + 6 - 40 = 0,85u_n - 34 = 0,85\left(u_n - \frac{34}{0,85}\right) = 0,85(u_n - 40) = 0,85w_n$$

Ainsi la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison 0,85 et premier terme  $w_0 = u_0 - 40 = 50$ . (0,5 pt)

2.b) la suite  $(w_n)$  étant géométrique, on en déduit :  $w_n = w_0q^n = 50 \times 0,85^n$

et comme  $w_n = u_n - 40$  on a donc :  $u_n = w_n + 40$

Donc  $u_n = 50 \times 0,85^n + 40$  (0,5 pt)

2.c) de  $u_n = 50 \times 0,85^n + 40$  et  $u_n + v_n = 120$ . On déduit :

$$v_n = 120 - u_n = 80 - 50 \times 0,85^n \quad (0,5 \text{ pt})$$

3. Validation des conjectures (0,5 pt)

#### Variation

La suite  $(u_n)$  est décroissante B1°

Pour tout  $n$ ,  $v_n = 120 - u_n$  et la suite  $(u_n)$  est décroissante, donc la suite  $(v_n)$  est croissante.

Limites :

$$0,85 \in ]-1; 1[ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,85^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-50 \times 0,85^n) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-50 \times 0,85^n + 40) = 40 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (80 - 50 \times 0,85^n) = 80 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 40 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 80$$

4.a) Dans cet algorithme, la variable  $u$ , initialisée à 90, représente le terme  $u_n$ , et  $120 - u$  représente donc  $v_n$ .

On sort de la boucle « tant que » dès que  $u < 120 - u$  c'est-à-dire dès que  $u_n < v_n$ ; l'algorithme affiche donc la plus petite valeur de l'entier  $n$  pour laquelle  $u_n \leq v_n$ .

C'est la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle le nombre de ruraux est devenu inférieur ou égal au nombre de citadins. (0,5 pt)

4. b. D'après le tableur,  $u_5 > v_5$  et  $u_6 < v_6$  donc la valeur affichée sera 6. (0,25 pt)

**EXERCICE IV : ( 5 points) POUR TOUS** d'après Polynésie septembre 2015

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

**Partie A 0,5+0,5+0,5**

1° Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe  $u = 1 - i$

$$\text{Module } |u| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$u = 1 - i = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right) = \sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$u = \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} \text{ est l'écriture exponentielle de } u$$

2° Pour tout réel  $\theta$

$$e^{i\theta}(1 - i) = (\cos \theta + i \sin \theta)(1 - i) = \cos \theta - i \cos \theta + i \sin \theta + \sin \theta$$

$$e^{i\theta}(1 - i) = \cos \theta + \sin \theta + i(\sin \theta - \cos \theta) \quad \text{forme algébrique} \quad \bullet^*$$

$$e^{i\theta}(1 - i) = e^{i\theta} \sqrt{2} e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2} e^{i\theta} e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2} e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} \quad \text{écriture exponentielle}$$

3°  $\bullet^*$  Démarche à retravailler

$$\text{D'après la question 2 : } \cos \theta + \sin \theta + i(\sin \theta - \cos \theta) = \sqrt{2} e^{i\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\text{Donc } \cos \theta + \sin \theta + i(\sin \theta - \cos \theta) = \sqrt{2} \left( \cos \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

Ces nombres complexes sont égaux donc leurs parties réelles sont égales :

$$\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2} \cos \left( \theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

**Partie B** 1° 0,75 2° : 0,5 3° : 0,75 4° 0,5+0,5+0,5

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur l'intervalle  $[0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = e^{-x} \cos(x)$  et  $g(x) = e^{-x}$ .

On définit la fonction  $h$  sur  $[0 ; +\infty[$  par  $h(x) = g(x) - f(x)$ .

### 1° Conjectures

1. a. On conjecture que les fonctions  $f$  et  $g$  en  $+\infty$  ont pour limite 0 en  $+\infty$

1. b. On conjecture que  $C_f$  est au-dessous ou en contact avec  $C_g$  sur  $[0 ; +\infty[$

1. c. 🌟 l'écart entre les deux courbes  $C_f$  et  $C_g$  est maximal quand  $h = f - g$  atteint son maximum ; on conjecture que cela se produit en l'abscisse 1,5

**Dans la suite, il s'agit de valider les conjectures. Vos justifications ne doivent pas être « graphiques »**

2° Pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$

$$h(x) = g(x) - f(x) = e^{-x} - e^{-x} \cos x = e^{-x}(1 - \cos x)$$

**Signe :**

$$e^{-x} > 0 \text{ et } \cos x \leq 1 \text{ donc } 1 - \cos x \geq 0$$

$$\text{Donc } e^{-x}(1 - \cos x) \geq 0 \text{ c'est-à-dire } h(x) \geq 0$$

$$\text{Donc pour tout } x \text{ de } [0 ; +\infty[, g(x) \geq f(x)$$

$$\text{Donc } C_g \text{ est située au-dessus ou au contact de } C_f \text{ sur l'intervalle } [0 ; +\infty[$$

Remarque : les courbes  $C_f$  et  $C_g$  ont une infinité de points d'intersection

En effet : pour  $x \in [0 ; +\infty[$

$$1 - \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0 + k \times 2\pi \quad (k \in \mathbb{N})$$

Autre méthode

Pour tout  $x$  de  $[0 ; +\infty[$

$$\cos(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow e^{-x} \times \cos(x) \leq e^{-x} \text{ (car } e^{-x} > 0)$$

$$\Rightarrow f(x) \leq g(x)$$

### 3° Asymptotes

On calcule les limites de chaque fonction en  $+\infty$   $f(x) = e^{-x} \cos(x)$  et  $g(x) = e^{-x}$ .

Limite de  $g$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$$

Limite de  $f$  🌟 A retravailler !!!

Pour tout  $x \in [0 ; +\infty[$ ,

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \text{ et } e^{-x} > 0$$

$$\text{Donc } -e^{-x} \leq e^{-x} \cos(x) \leq e^{-x}$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \text{ (cf limite de } g)$$

Donc par le théorème des gendarmes

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \cos(x) = 0$$

On a montré que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Donc la droite d'équation  $y = 0$  est asymptote horizontale aux courbes  $C_f$  et  $C_g$ .

#### 4. a. Dérivée de la fonction $h$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ .

D'après 2°, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0 ; +\infty[$   $h(x) = e^{-x}(1 - \cos x)$

$h$  est dérivable comme composée puis produit de fonctions dérivables sur  $[0 ; +\infty[$

et  $(uv)' = u'v + v'u$

$$u(x) = e^{-x} \quad u'(x) = -1e^{-x} \quad \bullet^* \text{ apprenez vos formules !!!!}$$

$$v(x) = 1 - \cos(x) \quad v'(x) = \sin(x)$$

Pour tout  $x \in [0 ; +\infty[$

$$\begin{aligned} h'(x) &= -e^{-x}(1 - \cos x) + e^{-x} \sin x \\ &= e^{-x}(\cos x + \sin x - 1) \end{aligned}$$

or d'après la partie A,  $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Donc pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0 ; +\infty[$ ,  $h'(x) = e^{-x} \left[ \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right]$

4.b. Justifier que, sur l'intervalle  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geq 0$   $\bullet^* \text{ A retravailler !!!}$

$$x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \text{ avec le cercle trigonométrique}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq \sqrt{2} - 1$$

$$\text{Donc sur l'intervalle } \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right], \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geq 0$$

#### 4° c. Tableau de variation de la fonction $h$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$

**On a :**  $h'(x) = e^{-x} \left[ \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right]$  or pour tout réel  $x$ ,  $e^{-x} > 0$

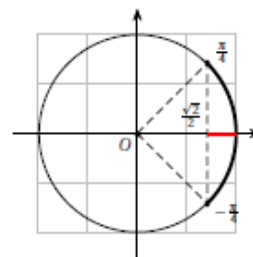
Donc  $h'(x)$  a le signe de  $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$

Ainsi avec 4b, on peut établir le tableau de variations de la fonction  $h$

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$2\pi$	
$h'(x)$		+	0	-
$h(x)$	0	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	0	0

$$h(0) = e^0(1 - \cos 0) = 0 ; \quad h\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{-\frac{\pi}{2}}(1 - \cos \frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}} ; \quad h(2\pi) = e^{2\pi}(1 - \cos 2\pi) = 0$$

Observez :  $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$  On valide ainsi la conjecture sur l'abscisse environ égale à 1,5 pour laquelle l'écart entre les deux courbes  $C_f$  et  $C_g$  est maximal.



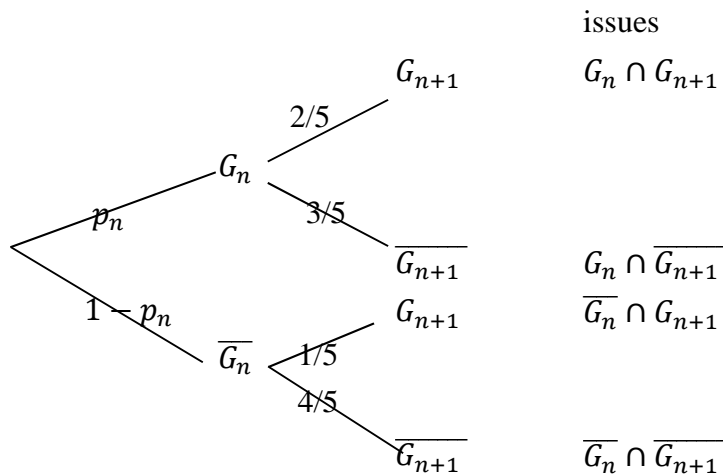
**EXERCICE I : (5 points)**

A : 3 ; B : 2

Antilles septembre 2011

**Partie A 3pts (1° : 0.5 2° 0.75 3° 0,75+0.5+0.5)**

1° Arbre pondéré suivant :



Données :

 $p_{G_n}(G_{n+1}) = \frac{2}{5}$  si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à  $\frac{2}{5}$ .

 $p_{\overline{G_n}}(\overline{G_{n+1}}) = \frac{4}{5}$  s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est  $\frac{4}{5}$ .

Données déduites :

$$p_{G_n}(\overline{G_{n+1}}) = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad p_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) = \frac{1}{5}$$

2° Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,

A l'aide de l'arbre pondéré,

 $G_{n+1}$  est la réunion de  $G_n \cap G_{n+1}$  et  $\overline{G_n} \cap G_{n+1}$  qui sont deux événements incompatibles, d'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p(G_{n+1}) \\ &= p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G_n} \cap G_{n+1}) \\ &= p(G_n) \times p_{G_n}(G_{n+1}) + p(\overline{G_n}) \times p_{\overline{G_n}}(G_{n+1}) \\ &= p_n \times \frac{2}{5} + (1 - p_n) \times \left(1 - \frac{4}{5}\right) \\ &= p_n \times \frac{2}{5} + (1 - p_n) \times \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} p_n + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a :  $p_{n+1} = \frac{1}{5} p_n + \frac{1}{5}$ **3. a. \*** montrons que la suite  $(u_n)$  est géométrique :Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a :

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5} p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5} p_n - \frac{1}{20} = \frac{1}{5} \left( p_n - \frac{1/20}{1/5} \right) = \frac{1}{5} \left( p_n - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{5} u_n$$

Ainsi la suite  $(u_n)$  est géométrique de raison  $\frac{1}{5}$

et de premier terme  $u_1 = p_1 - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

**3. b. \*** Forme explicite de la suite  $(u_n)$

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a :  $u_n = u_1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$ , c'est-à-dire  $v_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

\* Forme explicite de la suite  $(p_n)$

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on a :  $u_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$  et  $u_n = p_n - \frac{1}{4}$

On en déduit que  $p_n = u_n + \frac{1}{4} \Rightarrow p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$

☛ Revoyez vos formules :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_n = u_p \times q^{n-p} \quad ; \quad u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

**3. c.** Limite de  $(p_n)$

$$-1 < \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{4}$$

Ainsi la limite de la suite  $(p_n)$  est  $\frac{1}{4}$  ; la suite  $(p_n)$  converge vers  $\frac{1}{4}$ .

**Partie B : 2 pts**    1° : 0.5+0.5+0.25    2° : 0.25+0.5

**1. a.** on répète 10 fois de manière identique et indépendante une épreuve de Bernoulli

**Pour une épreuve de Bernoulli :** deux issues  $S$  « le joueur gagne la partie » et  $\bar{S}$  « le joueur perd la partie » de probabilités :  $p(S) = \frac{1}{4}$  ;  $p(\bar{S}) = \frac{3}{4}$

La variable aléatoire  $X$ , égale au nombre de parties gagnées par le joueur, suit une loi binomiale de paramètres 10 et  $\frac{1}{4}$ .

**1. b.** « le joueur gagne au moins une partie » :  $(X \geq 1)$

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0} \times \left(\frac{1}{4}\right)^0 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10} \approx 0,94$$

Ainsi, la probabilité que le joueur gagne au moins une partie est 0,94 à  $10^{-2}$  près.

**1. c.**  $E(X) = 10 \times \frac{1}{4} = 2,5$

**2.a.**  $E(X) = 2,5$  signifie qu'il peut espérer gagner 2,5 parties pour 10 parties jouées

Chaque partie gagnée lui rapporte 8€, il gagnerait  $2,5 \times 8 = 20$ € mais il doit payer 30€ pour jouer, d'où une perte de 10€ ; le jeu est désavantageux pour lui.

**2. b.** Pour réaliser un bénéfice supérieur à 40€, le joueur qui paye 30€ pour jouer, doit gagner plus de 70€, donc gagner au moins 9 parties, puisque chaque partie gagnée lui rapporte 8€.

« au moins 9 parties » :  $(X \geq 9)$

$$\begin{aligned} p(X \geq 9) &= p(X = 9) + p(X = 10) \\ &= \binom{10}{9} \times \left(\frac{1}{4}\right)^9 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{10}{10} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 \\ &= 10 \times \left(\frac{1}{4}\right)^9 \times \frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^{10} \\ &\approx 0,000\ 03 \end{aligned}$$

La probabilité de réaliser un bénéfice supérieur à 40€ est 0,000 03

### EXERCICE II : (3 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les points  $A(3; 1; -5)$ ,  $B(0; 4; -5)$ ,  $C(-1; 2; -5)$  et  $D(2; 3; 4)$ .

1° Aucune justification n'est demandée. **1 : FAUX 2 : FAUX 3 : VRAI**

**0.75 Affirmation 1.** Les points A, B et D sont alignés.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$  ont des coordonnées non proportionnelles  $\left(\frac{-1}{-3} \neq \frac{2}{3}\right)$ , donc ils ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et D sont non alignés. **Affirmation 1 fausse**

**0.75 Affirmation 2.** Les points A, B, C et D sont coplanaires.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AD}$  ne sont pas colinéaires.

Existe-t-il deux réels  $a$  et  $b$  tels que  $\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD}$  ?

$$\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 = -3a - b \\ 1 = 3a + 2b \\ 0 = 9b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4/3 \\ a = 1/3 \\ b = 0 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution. Ainsi, les points ne sont pas coplanaires. **Affirmation 2 fausse**

**0.75 Affirmation 3.** Une représentation paramétrique de la droite (BD) est : 
$$\begin{cases} x = 1 - 2k \\ y = \frac{7}{2} + k \\ z = \frac{-1}{2} - 9k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Méthode 1 : Les coordonnées de B et D vérifient-elles le système ?

$$\begin{cases} x_B = 1 - 2k \\ y_B = \frac{7}{2} + k \\ z_B = \frac{-1}{2} - 9k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 1 - 2k \\ 4 = \frac{7}{2} + k \\ -5 = \frac{-1}{2} - 9k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \\ k = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_D = 1 - 2k \\ y_D = \frac{7}{2} + k \\ z_D = \frac{-1}{2} - 9k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 1 - 2k \\ 3 = \frac{7}{2} + k \\ 4 = \frac{-1}{2} - 9k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{-1}{2} \\ k = \frac{-1}{2} \\ k = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Les coordonnées des points B et D vérifient le système donné, donc ce système est une représentation paramétrique de la droite (BD).

Méthode 2 :

Un vecteur directeur de la droite (BD) est  $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite dont on donne une représentation paramétrique

On observe que  $\vec{u} = -\overrightarrow{BD}$

Il reste à vérifier que le point  $E\left(1; \frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$  est un point de (BD)

$$\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} -1 \\ -1/2 \\ -9/2 \end{pmatrix} \quad \text{on observe que } \overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{BD} \quad \text{donc } E \in (BD)$$

**Affirmation 3 vraie**

**0.75 2° Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC)**

Le plan (ABC) passe par  $A(3; 1; -5)$ ,

et est dirigé par les vecteurs non colinéaires  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

D'où une représentation paramétrique du plan (ABC) : 
$$\begin{cases} x = 3 - 3t - 4t' \\ y = 1 + 3t + t' \\ z = -5 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad t' \in \mathbb{R}$$

**EXERCICE III : (5 points)**

[d'après Baccalauréat S Amérique du Sud \ 24 novembre 2015

**Partie A : 1°-2° : 1 3° : 0,75**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , on désigne par  $C_u$  la courbe représentative de la fonction  $u$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par :

$$u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des réels fixés.

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe  $C_u$  et la droite  $D$  d'équation  $y = 1$ .

On précise que la courbe  $C_u$  passe par les points  $A(1; 0)$  et  $B(4; 0)$

et que l'axe des ordonnées et la droite  $D$  sont asymptotes à la courbe  $C_u$ .

1. Donner les valeurs de  $u(1)$  et  $u(4)$  :  $\mathbf{u(1) = u(4) = 0}$

2. Donner :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x)$

la droite  $D$  d'équation  $y = 1$  est asymptote à la courbe  $C_u$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 1$

En déduire la valeur de  $a$ .

pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}$

Or  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{b}{x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{c}{x^2} = 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = a$

Or par les données, cette limite est égale à 1 donc  $\mathbf{a = 1}$

3. En déduire que, pour tout réel  $x$  strictement positif,  $u(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$

pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $u(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = 1 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2} = \frac{x^2 + bx + c}{x^2}$

Or  $u(1) = u(4) = 0$  donc 1 et 4 sont racine de  $u(x)$

donc le numérateur est factorisable par  $(x - 1)(x - 4) = x^2 - 5x + 4$

Or dans le numérateur  $x^2 + bx + c$ , le coefficient de  $x^2$  est 1 donc ce numérateur est égal à  $x^2 - 5x + 4$

Donc pour tout réel  $x$  strictement positif,  $u(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$

**Autre méthode :**

$$u(1) = u(4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1^2 + b + c}{1} = 0 \\ \frac{16 + 4b + c}{16} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -1 \\ 4b + c = -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + c = -1 \\ -3b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -1 + 5 = 4 \\ b = -5 \end{cases}$$

Donc pour tout réel  $x$  strictement positif,  $u(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2}$

**Partie B** 1°-2° : 1      3° : 1.25      4° : 1

Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par  $f(x) = x - 5 \ln x - \frac{4}{x}$

**1° Déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0.**

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 4 = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \ln x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x = 0^+ \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^2 - 5x \ln x - 4 = -4 \left. \right\} \Rightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x^2 - 5x \ln x - 4}{x} = -\infty$$

Ainsi  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  **0.5**

**2° Déterminer la limite de  $f(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .**

Pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = x - 5 \ln x - \frac{4}{x} = x \left(1 - 5 \frac{\ln x}{x}\right) - \frac{4}{x}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ (C. comparée)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 5 \frac{\ln x}{x}\right) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - 5 \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty \text{ d'où:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - 5 \frac{\ln x}{x}\right) - \frac{4}{x} = +\infty \text{ ainsi } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

**3° Dérivée.**

La fonction  $f$  est dérivable comme somme de fonctions dérivables sur  $]0 ; +\infty[$

Pour tout  $x > 0$ ,  $f(x) = x - 5 \ln x - \frac{4}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2} = u(x)$$

Donc pour tout réel  $x$  strictement positif,  $f'(x) = u(x)$

et pour tout  $x > 0$ ,  $x^2 > 0$  donc  $f'(x)$  a le signe du polynôme du second degré  $x^2 - 5x + 4$  dont les racines sont 1 et 4 d'après la partie A

**Tableau de variation de  $f$**

$x$	0	1	4	$+\infty$		
$f'(x) = u(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$-3$	$3 - 5 \ln 4$	$+\infty$		

$$f(4) = 4 - 5 \ln 4 - \frac{4}{4} = 3 - 5 \ln 4$$

**4° Aire  $\mathcal{A}$ , exprimée en unité d'aire, du domaine hachuré sur le graphique de la partie A.**

La fonction  $u$  est continue et **NEGATIVE** sur  $[1; 4]$  donc en unité d'aire, l'aire du domaine hachuré est

$$\mathcal{A} = - \int_1^4 u(x) dx = -[f(x)]_1^4 \quad f \text{ est une primitive de } u \text{ puisque } f' = u$$

$$\mathcal{A} = -(f(4) - f(1)) = f(1) - f(4) = -3 - 3 + 5 \ln 4 = 5 \ln 4 - 6 \text{ unité d'aire}$$

$$\mathcal{A} = 5 \ln 4 - 6 \text{ u. a.} \quad \text{valeur arrondie à 0.01 près } 0,93 \text{ unité d'aire.}$$

**EXERCICE IV : (7 points)**

National septembre 2015

Soit  $f$  la fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  telle que :  $f(x) = \frac{x}{e^x - x}$ .On admet que la fonction  $f$  est positive sur l'intervalle  $[0; +\infty[$ .**Partie A : 1° : 1.25 2° : 1.25 + 0.5 + 1.5 3° : 0.25**Soit la suite  $(I_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$I_n = \int_0^n f(x) dx$$

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de  $I_n$  en fonction de  $n$ .1. Montrer que la suite  $(I_n)$  est croissante :

●\* Démarche à apprendre

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{n+1} f(x) dx - \int_0^n f(x) dx = \int_0^{n+1} f(x) dx + \int_n^0 f(x) dx = \int_n^0 f(x) dx + \int_0^{n+1} f(x) dx = \int_n^{n+1} f(x) dx$$

Or sur  $[0; +\infty[$ , la fonction  $f$  est positive, continue car dérivable et  $n < n + 1$  donc par positivité de l'intégrale,

$$\int_n^{n+1} f(x) dx \geq 0 \text{ soit } I_{n+1} \geq I_n$$

**Conclusion : la suite  $(I_n)$  est bien croissante.**2. On admet que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  $e^x - x \geq \frac{e^x}{2}$ 2. a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,

$$I_n \leq \int_0^n 2x e^{-x} dx$$

Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; +\infty[$ ,  $e^x - x \geq \frac{e^x}{2} > 0$ Or tous ces nombres appartiennent à l'intervalle  $]0; +\infty[$  sur lequel la fonction inverse est strictement décroissante donc  $\frac{1}{e^x - x} \leq \frac{2}{e^x}$ .En multipliant les deux membres de la dernière inégalité par  $x \geq 0$ , il vient  $\frac{x}{e^x - x} \leq 2x e^{-x}$ .Par intégration de l'inégalité sur un l'intervalle  $[0; n]$ , on a :

$$\int_0^n \frac{x}{e^x - x} dx \leq \int_0^n 2x e^{-x} dx$$

**Conclusion** : pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n \leq \int_0^n 2x e^{-x} dx$  .2. b. Soit  $H$  la fonction définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  telle que :

$$H(x) = (-x - 1)e^{-x}.$$

Déterminer la fonction dérivée  $H'$  de la fonction  $H$ . $H$  est dérivable sur  $[0; +\infty[$  en tant que produit puis composée de fonctions dérivables sur  $[0; +\infty[$ .

$$u(x) = -x - 1 \quad u'(x) = -1$$

$$v(x) = e^{-x} \quad v'(x) = -e^{-x}$$

$$\text{Avec } (uv)' = u'v + uv' : f'(x) = -1e^{-x} - e^{-x}(-x - 1) = xe^{-x}$$

2. c. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n \leq 2$

D'après 2a) , pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$I_n \leq \int_0^n 2x e^{-x} dx$$

Or d'après 2b), une primitive de  $x \mapsto xe^{-x}$  est  $x \mapsto (-x - 1)e^{-x}$ .

Donc :

$$I_n \leq 2[(-x - 1)e^{-x}]_0^n \text{ donc } I_n \leq 2((-n - 1)e^{-n} + 1) \text{ donc } I_n \leq 2 - 2(n + 1)e^{-n}$$

🔍 Démarche à apprendre

Or  $n \in \mathbb{N}$  donc  $2(n + 1) > 0$  donc comme  $e^{-n} > 0$  alors  $2(n + 1)e^{-n} > 0$

Par suite,  $-2(n + 1)e^{-n} < 0$  donc  $2 - 2(n + 1)e^{-n} < 2$ .

Au final, pour tout entier naturel  $n$ ,  $I_n \leq 2$ .

3. Montrer que la suite  $(I_n)$  est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

D'après 1), la suite  $(I_n)$  est croissante et d'après 2c), elle est majorée par 2 donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite  $(I_n)$  est convergente.

### Partie B : 1° : 1    2° : 0.75    3° : 0.5

On considère l'algorithme suivant dans lequel les variables sont

$K$  et  $i$  des entiers naturels,  $K$  étant non nul ;  $A, x$  et  $h$  des réels.

Entrée	Saisir $K$ entier naturel non nul.
Initialisation	Affecter à $A$ la valeur 0 ; affecter à $x$ la valeur 0 ; affecter à $h$ la valeur $\frac{1}{K}$ .
Traitement	Pour $i$ variant de 1 à $K$ Affecter à $A$ la valeur $A + h \times f(x)$ Affecter à $x$ la valeur $x + h$ Fin Pour.
Sortie	Afficher $A$ .

1. Compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour  $K = 4$ . Les valeurs successives de  $A$  seront arrondies au millième.

**Algorithme : Pour  $K=4$ ,  $h = \frac{1}{K} = \frac{1}{4} = 0,25$  Observez que  $h$  est fixe !**

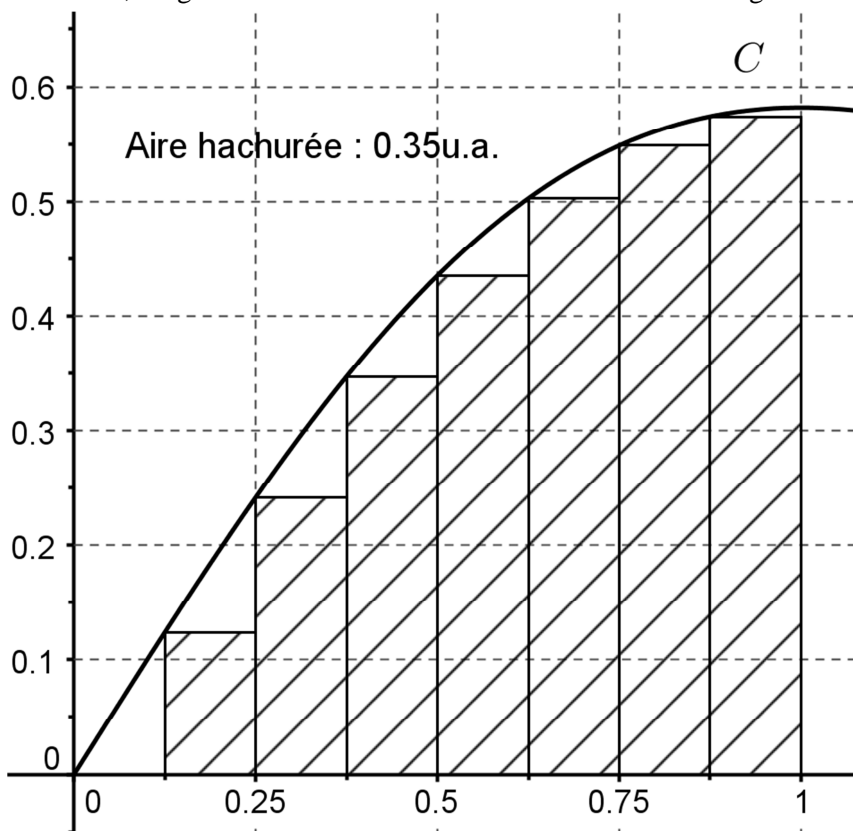
$i$	$A$	$x$
1	$\frac{1}{4}f(0) = 0$	$\frac{1}{4}$
2	$\frac{1}{4}f(0) + \frac{1}{4}f\left(\frac{1}{4}\right) \approx 0,060$	$\frac{1}{2}$
3	0,169	$\frac{3}{4}$
4	0,306	1

**Affichage :  $A = 0,306$**

Voir graphique en fin de corrigé

2. En l'illustrant sur la figure à rendre avec la copie, donner une interprétation graphique du résultat affiché par cet algorithme pour  $K = 8$  :

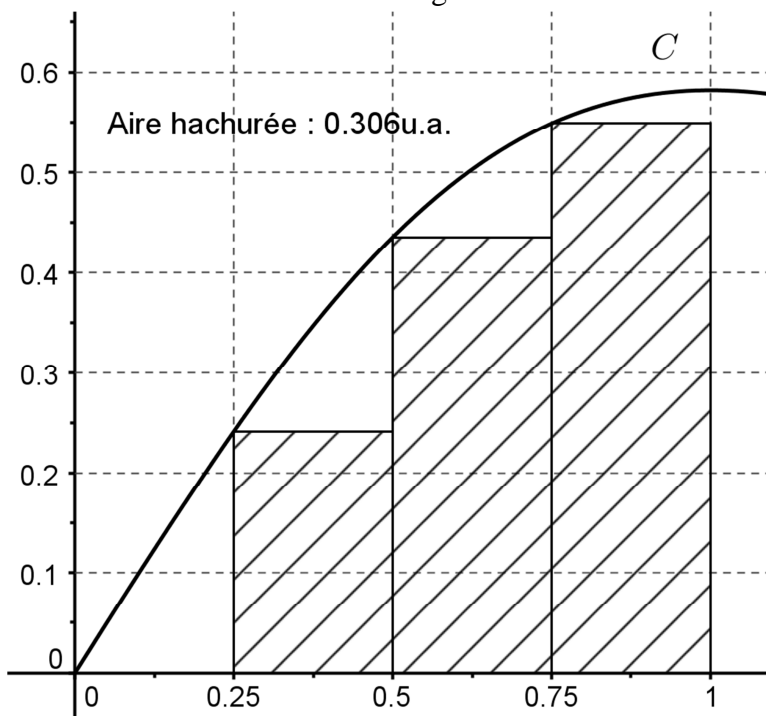
Pour  $K=8$ , l'algorithme affiche la somme des aires des 8 rectangles hachurés ci-dessous.



3. Que donne l'algorithme lorsque  $K$  devient grand ?

Quand  $K$  devient grand, l'algorithme affiche une valeur approchée par défaut de l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe  $C_f$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .

Illustration non demandée de l'algorithme



**EXERCICE I : (14 points)**

1° : 2 2° : 3 3° : 2 - 4° : 2.5 5° : 2.5 6° : 2

Polynésie 2014

$$1^\circ \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \dots = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{CD}$$

Ainsi le triangle  $BCD$  est rectangle en  $C$ **Aire de  $BCD$** 

$$BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$DC = \|\overrightarrow{DC}\| = \sqrt{6^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{70}$$

$$\mathcal{A}_{BCD} = \frac{1}{2} BC \times CD = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{70} = \frac{5}{2} \sqrt{14} \text{ u. a.}$$

$$2^\circ \text{ a) } \quad \vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \vec{n} = \dots = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BC} \perp \vec{n}$$

$$\overrightarrow{CD} \cdot \vec{n} = \dots = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CD} \perp \vec{n}$$

Le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, donc  $\vec{n}$  est un vecteur normal au plan ( $BCD$ )

$$\text{b) } (BCD) \text{ a pour vecteur normal } \vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{une équation de } (BCD) : -2x + 3y + z + d = 0$$

$$B(-1; 1; 0) \in (BCD) \Rightarrow 2 + 3 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = -5.$$

$$\text{Ainsi une équation cartésienne de } (BCD) \text{ est : } \mathbf{-2x + 3y + z - 5 = 0}$$

3° la droite ( $d$ ) est orthogonale à ( $BCD$ ) donc le vecteur  $\vec{n}$  normal à ( $BCD$ ) est vecteur directeur de ( $d$ ) ; de plus ( $d$ ) passe par  $A(5; -5; 2)$ D'où une représentation paramétrique de ( $d$ ) :

$$\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

4° intersection de ( $d$ ) et ( $BCD$ )

$$M(x; y; z) \in (d) \cap (BCD) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + t \\ -2x + 3y + z - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 2 + t \\ -28 + 14t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 4 \\ t = 2 \end{cases}$$

D'où le point  $H(1; 1; 4)$  est le point d'intersection de ( $d$ ) et ( $BCD$ )5° la droite ( $d$ ) passe par  $A$  et est orthogonale au plan ( $BCD$ ) de plus elle coupe ( $BCD$ ) en  $H$ , donc  $[AH]$  est la hauteur issue de  $A$  dans le tétraèdre  $ABCD$ 

$$\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ donc } AH = \|\overrightarrow{AH}\| = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{(BCD)} \times AH = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} \sqrt{14} \times 2\sqrt{14} = \frac{70}{3} \text{ u. v.}$$

$$6^\circ \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \dots = 66$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-2)^2} = \sqrt{76} \quad AC = \dots = \sqrt{61}$$

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{66}{\sqrt{76} \times \sqrt{61}} = \frac{66}{\sqrt{4636}} \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 14,2^\circ$$

### **EXERCICE II : (6 points)**

L'espace est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ,

$$A(3; -1; 4), B(-1; 2; -3), C(4; -1; 2). \quad P : 2x - 3y + 2z - 7 = 0.$$

La droite  $\Delta$  a pour représentation paramétrique 
$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 4 - t \\ z = -8 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Affirmation 1 :** Les droites  $\Delta$  et  $(AC)$  sont perpendiculaires. **FAUX**

$$\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } \Delta \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } (AC)$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = 4 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times (-2) = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AC} \perp \vec{u}$$

Donc les droites sont orthogonales.

Ont-elles un point commun ?

$$M(x; y; z) \in (AC) \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 4 - t \\ z = -8 + 2t \\ x = 3 + t' \\ y = -1 \\ z = 4 - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + t' = -1 + 4t \\ -1 = 4 - t \\ 4 - 2t' = -8 + 2t \\ x = 1 + t' \\ y = -1 \\ z = 2 - 2t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 16 \\ t = 5 \\ t' = 1 \\ x = 1 + t' \\ y = -1 \\ z = 2 - 2t' \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution, donc les droites n'ont pas de point commun, ainsi les droites  $(AC)$  et  $\Delta$  ne sont pas perpendiculaires.

**L'affirmation 1 est fautive.**

**Affirmation 2 :** Tous les points dont les coordonnées  $(x; y; z)$  sont données par

$$\begin{cases} x = 1 + s - 2s' \\ y = 1 - 2s + s' \\ z = 1 - 4s + 2s' \end{cases} \quad s \in \mathbb{R} \text{ et } s' \in \mathbb{R} \text{ appartiennent au plan } P. \quad \text{FAUX}$$

Pour  $s = s' = 0$ , on a  $E(1; 1; 1)$  ce point appartient au plan donc on donne la représentation paramétrique

$$\text{Or } 2x_E - 3y_E + 2z_E - 7 = -6 \neq 0$$

Donc  $E \notin P$

Il existe au moins un point dont les coordonnées vérifient le système, mais n'appartenant pas à  $P$

**L'affirmation 2 est fautive.**

**Affirmation 3 :** Il existe un plan parallèle au plan  $P$  qui contient la droite  $\Delta$  **FAUX**

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal au plan } P \quad ; \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } \Delta$$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 2 \times 4 + (-3) \times (-1) + 2 \times 2 = 15 \neq 0$$

$\Rightarrow \vec{n}$  et  $\vec{u}$  ne sont pas orthogonaux

Donc la droite n'est pas parallèle au plan  $P$

Donc la droite et le plan sont sécants

Ainsi il n'existe pas de plan parallèle à  $P$  contenant  $\Delta$ .

**L'affirmation 3 est fautive.**

**EXERCICE I : (3 points)** d'après Centres étrangers Juin 2014 1. 0.5 2. 1.25 3. . 1.25

Dans l'espace, on considère les points :  $A(1; 2; 7)$ ,  $B(2; 0; 2)$ ,  $C(3; 1; 3)$ .

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$  ont des coordonnées non proportionnelles,  $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{-2}$

Donc ils ne sont pas colinéaires,

Ainsi les points A, B, C ne sont pas alignés

2. a.  $\vec{u}$  est normal au plan (ABC) si et seulement si  $\vec{u}$  est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de (ABC)

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \overrightarrow{AB} \\ \vec{u} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \times 1 + (-2) \times b + (-5) \times c = 0 \\ 2 \times 1 + (-1) \times b + (-4) \times c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2b - 5c = 0 \\ 2 - b - 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2(2 - 4c) - 5c = 0 \\ 2 - 4c = b \end{cases} = 0$$

$$\dots \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 \\ b = -2 \end{cases}$$

D'où  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal au plan (ABC)

2. b. Une équation du plan est de la forme :  $1x - 2y + 1z + d = 0$

$$A(1; 2; 7) \in (ABC) \Rightarrow 1 - 2 \times 2 + 7 + d = 0 \Rightarrow d = -4$$

Ainsi une équation du plan (ABC) est :  $x - 2y + z - 4 = 0$

3. a.

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$

On observe que  $\vec{v} = 2\vec{u}$ , donc ces vecteurs sont colinéaires, or  $\vec{u}$  est un vecteur normal au plan (ABC) ainsi, la droite  $\mathcal{D}$  est orthogonale au plan (ABC)

3. b. Point d'intersection H

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = 2t - 1 \\ x - 2y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2t + 3) - 2(-4t + 5) + (2t - 1) - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12t - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \\ z = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

Ainsi, le point H a pour coordonnées (5; 1; 1)

**EXERCICE II : (3 points)** d'après **Nouvelle Calédonie** Novembre 2007

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 0,75 point ; une réponse fautive ou l'absence de réponse ne rapporte, ni n'enlève de point.

*Aucune justification n'est demandée. Des méthodologies avec connaissances, calculatrice et aide graphique sont données dans ce corrigé.*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$

1. Une solution de l'équation  $2z + \bar{z} = 9 + i$  est :

a. 3

b.  $i$

c.  $3 + i$

**Réponse c**

- On teste les solutions proposées  $z = 3$  puis  $z = i$  ne vérifient pas l'égalité  $2z + \bar{z} = 9 + i$  donc la solution est la 3<sup>ème</sup>.

Conseil : vérifier quand même que  $z = 3 + i$  vérifie l'égalité

- Ou l'on résout avec la méthode adaptée : l'équation contient  $z$  et son conjugué, on pose donc  $z = x + iy$  avec  $x$  et  $y$  réels

2. L'ensemble des solutions dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $\frac{z-2}{z-1} = z$  est :

a.  $\{1 - i\}$

b. L'ensemble vide

c.  $\{1 - i ; 1 + i\}$

**Réponse c**

De même on teste les solutions proposées à la main ou calculatrice

ou l'on résout en remarquant d'abord que la condition d'existence est  $z \neq 1$

Par produit en croix :  $z - 2 = z(z - 1) \Leftrightarrow z^2 - 2z + 2 = 0$

Second degré dans  $\mathbb{C}$  :  $\Delta = -12 < 0$  :

$x = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ... on après simplification on trouve  $1 - i$  et  $1 + i$

3. Soit  $z$  un nombre complexe non nul d'argument  $\theta$ . Un argument de  $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$  est :

a.  $-\frac{\pi}{3} + \theta$

b.  $\frac{2\pi}{3} + \theta$

c.  $\frac{2\pi}{3} - \theta$

**Réponse b**

On sait que  $\arg z = \theta$  à  $2\pi$  près ; or  $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$  à  $2\pi$  près donc  $\arg(\bar{z}) = -\theta$  à  $2\pi$  près

On cherche un argument de  $-1 + i\sqrt{3}$

$-1 + i\sqrt{3} = 2 \left( \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$  donc  $\arg \left( \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2\pi}{3}$  à  $2\pi$  près

$\arg \left( \frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}} \right) = \arg(-1 + i\sqrt{3}) - \arg(\bar{z})$  à  $2\pi$  près

$= \frac{2\pi}{3} + \theta$  à  $2\pi$  près donc  $\frac{2\pi}{3} + \theta$  est donc bien un argument de  $\frac{-1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$

4. Soient  $A$  et  $B$  deux points d'affixe respective  $i$  et  $-1$ . L'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  vérifiant  $|z - i| = |z + 1|$  est :

a. la droite  $(AB)$

b. le cercle de diamètre  $[AB]$

c. la droite perpendiculaire à  $(AB)$  passant par  $O$

**Réponse c**

On a  $z_A = 1$  et  $z_B = -1$  et  $z_M = z$

donc  $|z - i| = |z + 1| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$

Ce qui équivaut à dire que  $M$  appartient à la médiatrice du segment  $[AB]$  qui est bien perpendiculaire à la droite  $(AB)$ .

On élimine les réponses a et b. Par sécurité, on peut aussi vérifier graphiquement que l'origine  $O$  est bien sur la médiatrice de  $[AB]$

**EXERCICE III : (5 points) NON SPE A : 2 B : 2 C : 1** d'après Polynésie septembre 2015

**Partie A**

On étudie une maladie dans la population d'un pays. On a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre ( $\text{ng.mL}^{-1}$ ), d'une substance Gamma présente dans le sang est plus élevé chez les personnes atteintes de cette maladie que chez les personnes qui n'en sont pas atteintes.

1. Le taux de cette substance Gamma dans la population des personnes qui ne sont pas atteintes par la maladie est modélisé par une variable aléatoire  $T$  qui suit la loi normale d'espérance  $\mu = 40$  et d'écart-type  $\sigma = 8$

$T$  suit la loi normale d'espérance  $\mu = 40$  et d'écart-type  $\sigma = 8$  donc

$$P(T > 60) = 0,5 - P(40 < T < 60)$$

En utilisant la calculatrice, on obtient en arrondissant :

$$P(T > 60) = 0,5 - \text{NormalFRep}(40,60,40,8) = 0,006$$

La probabilité que le taux dans le sang de la substance Gamma soit supérieur à  $60 \text{ ng.mL}^{-1}$  est 0,006

2. Des études ont mis en évidence que le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de  $50 \text{ ng.mL}^{-1}$  et que 10 % d'entre elles ont un taux de substance Gamma inférieur à  $43 \text{ ng.mL}^{-1}$ .

On appelle  $T'$  la variable aléatoire qui modélise le taux de la substance Gamma en  $\text{ng.mL}^{-1}$  chez une personne atteinte par la maladie étudiée.

On admet que  $T'$  suit la loi normale d'espérance  $\mu'$  et d'écart-type  $\sigma'$ .

Préciser la valeur de  $\mu'$  et déterminer la valeur de  $\sigma'$ .

Le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de  $50 \text{ ng.mL}^{-1}$  donc  $\mu' = 50$ .

D'après l'énoncé, 10 % d'entre elles ont un taux de substance Gamma inférieur à  $43 \text{ ng.mL}^{-1}$  donc  $P(T' < 43) = 0,1$ .

Comme  $T'$  suit une loi normale de paramètres  $\mu' = 50$  et  $\sigma'$  alors d'après le cours,

la variable  $M = \frac{T'-50}{\sigma'}$  suit la loi normale centrée réduite.

$$\text{Or } P(T' < 43) = 0,1 \Leftrightarrow P(T' - 50 < -7) = 0,1 \Leftrightarrow P\left(\frac{T'-50}{\sigma'} < -\frac{7}{\sigma'}\right) = 0,1 \Leftrightarrow P\left(M < -\frac{7}{\sigma'}\right) = 0,1$$

A l'aide de la calculatrice, il faut donc trouver  $k$  tel que  $P(M < k) = 0,1$  où  $M$  suit la loi centrée réduite.

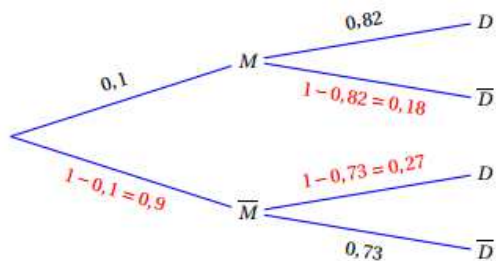
$$\text{On obtient, } k \approx -1,2816 \text{ donc } -\frac{7}{\sigma'} = -1,2816 \text{ donc } \sigma' = -\frac{1,2816}{-7} \text{ donc } \sigma' \approx 5,46.$$

**Conclusion** :  $T'$  suit la loi normale de paramètres  $\mu' = 50$  et  $\sigma' \approx 5,46$

**Partie B**

1. Démontrer que la probabilité qu'un patient ait un dépistage positif est de 0,325.

En regroupant les données de l'énoncé dans un arbre pondéré, on obtient :



Les issues  $M \cap D$  et  $M \cap \bar{D}$  forment une partition de D donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P(D) = P(M \cap D) + P(\bar{M} \cap D) = P(M) \times P_M(D) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(D) = 0,1 \times 0,82 + 0,9 \times 0,27 = 0,325$$

2. Calculer  $p_D(M)$

$$P_D(M) = \frac{P(D \cap M)}{P(D)} = \frac{0,082}{0,325} \text{ donc } P_D(M) \approx 0,252$$

Interprétation : La probabilité qu'un patient ayant un test positif soit malade est 0,252 arrondie au millième.

3. Un patient a un dépistage positif. Le médecin le rassure (légèrement) en lui indiquant qu'il n'a qu'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie. Qu'en pensez-vous ?

Comme  $0,252 \approx 0,25$ , alors effectivement, le patient a un peu plus d'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie.

### Partie C

Lors du dépistage précédent, la prise de sang est effectuée chez des sujets à jeun.

Les données montrent que 82 % des patients malades ont un dépistage positif.

Pour améliorer le confort des personnes susceptibles de subir cet examen sanguin, on souhaite vérifier si le fait d'être à jeun est une condition indispensable dans le protocole.

On considère un groupe de 300 personnes malades sur lesquelles la prise de sang n'est pas effectuée à jeun.

Le dépistage se révèle positif pour 74 % d'entre elles.

Ce dépistage peut-il être effectué sur des personnes qui ne sont pas à jeun ?

On a un échantillon de taille  $n = 300$ .

La proportion  $p$  de patients malades qui ont un dépistage positif est  $p = 0,82$ .

$$\text{Or } \begin{cases} n = 300 \geq 30 \\ np = 300 \times 0,82 = 246 \geq 5 \\ n(1-p) = 300 \times 0,18 = 54 \geq 5 \end{cases}$$

donc les conditions sont vérifiées pour qu'on puisse déterminer un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des patients malades qui ont un test positif dans un échantillon de taille

$n = 300$  :

$$\begin{aligned} I_{300} &= \left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \\ &= \left[ 0,82 - 1,96 \frac{\sqrt{0,82 \times 0,18}}{\sqrt{300}}, 0,82 + 1,96 \frac{\sqrt{0,82 \times 0,18}}{\sqrt{300}} \right] \end{aligned}$$

Donc  $I_{300} \approx [0,776; 0,864]$ .

Le dépistage se révèle positif pour 74% des personnes à jeun donc  $f = 0,74$ .

Comme  $f \notin I$  alors avec un risque d'erreur de 5%, on peut conclure que le test doit être pratiqué sur des personnes à jeun.

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On considère la fonction  $f_n$  définie et dérivable sur l'ensemble  $\mathbb{R}$  des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2 e^{-2nx}.$$

On note  $C_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans un repère orthogonal.

On définit, pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

**Partie A : Étude de la fonction  $f_1$**

1. a. pour tout réel  $x$ ,  $f_1'(x) = 2x \times e^{-2x} + x^2 \times (-2) e^{-2x} = 2xe^{-2x}(1 - x)$ .

1. b. Pour déterminer les variations de la fonction  $f_1$ , on étudie le signe de  $f_1'$  sur  $\mathbb{R}$

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$	$e^X > 0$ sur $\mathbb{R}$
$2x$					
$e^{-2x}$					
$1 - x$					
$f_1'(x)$	-	0	+	0	-

Donc la fonction  $f_1$  est strictement décroissante sur les intervalles  $]-\infty ; 0]$  et  $[1 ; +\infty[$ , et elle est strictement croissante sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

1. c. limite en  $-\infty$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x) &= +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} 2xe^{-2x} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f_1(x) = +\infty$$

1. d. pour tout réel  $x$ ,  $f_1(x) = x^2 e^{-2x} = x^2 (e^{-x})^2 = x^2 \left(\frac{1}{e^x}\right)^2 = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2$

Limite en  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ (C. Comparée)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x}\right)^2 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = 0$$

2. on sait qu'une primitive  $F_1$  de la fonction  $f_1$  est donnée par :  $F_1(x) = -e^{-2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)$ .

donc

$$I_1 = F_1(1) - F_1(0) = \left(-e^{-2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\right) - \left(-e^0 \left(0 + 0 + \frac{1}{4}\right)\right) = -\frac{5e^{-2}}{4} + \frac{1}{4}$$

**Partie B : Étude de la suite  $(I_n)$**

1° a) les fonctions  $f_n$  sont continues

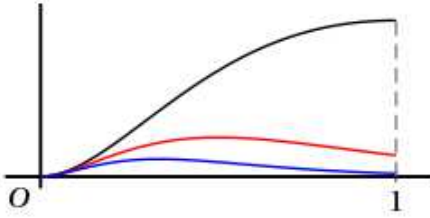
De plus sur  $[0 ; 1]$ ,  $x^2 \geq 0$  et  $e^{-2nx} > 0$  donc  $f_n(x) \geq 0$

On en déduit que  $I_n$  représente, en unités d'aire, l'aire sous la courbe  $C_n$  sur  $[0 ; 1]$ , c'est-à-dire l'aire du domaine défini par l'ensemble des points  $M(x ; y)$  telles que  $0 \leq x \leq 1$  et  $0 \leq y \leq f_n(x)$

1° b) Si on trace sur une calculatrice les représentations graphiques des fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ , on voit que sur  $[0 ; 1]$ ,  $f_1(x) > f_2(x) > f_3(x) > 0$ .

Les intégrales entre 0 et 1 sont rangées dans le même ordre que les fonctions

Donc la suite  $(I_n)$  semble décroissante et semble tendre vers 0.



2. a. pour tout réel  $x$  appartenant à  $[0 ; 1]$ ,

$$f_{n+1}(x) = x^2 e^{-2(n+1)x} = x^2 e^{-2nx-2x} = x^2 e^{-2nx} e^{-2x} = e^{-2x} f_n(x)$$

2. b. pour tout réel  $x$  appartenant à  $[0 ; 1]$ ,

$$0 \leq x \leq 1$$

$$\Rightarrow -2 \leq -2x \leq 0$$

$$\Rightarrow e^{-2} \leq e^{-2x} \leq e^0$$

$$\Rightarrow e^{-2x} \leq 1 \quad \text{De plus } f_n(x) \geq 0 \text{ (cf B-1°a)}$$

$$\Rightarrow e^{-2x} \times f_n(x) \leq f_n(x)$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$$

2. c. on a pour tout réel  $x$  appartenant à  $[0 ; 1]$ ,  $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

Par croissance de l'intégrale avec  $0 < 1$   $\int_0^1 f_{n+1}(x) dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx$  soit  $I_{n+1} \leq I_n$

**Donc la suite  $(I_n)$  est décroissante**

3. Soit  $n$  un entier naturel non nul.

3. a. on a pour tout réel  $x$  appartenant à  $[0 ; 1]$ :  $0 \leq x^2 \leq 1$  et comme  $e^{-2nx} > 0$  on déduit que  $0 \leq x^2 e^{-2nx} \leq e^{-2nx}$

Ainsi pour tout entier naturel  $n$  non nul et pour tout réel  $x$  appartenant à  $[0 ; 1]$ ,

$$0 \leq f_n(x) \leq e^{-2nx}$$

b. Par intégration de l'inégalité précédente sur  $[0 ; 1]$  :

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \int_0^1 e^{-2nx} dx \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-2nx} dx$$

Une primitive de la fonction  $x \rightarrow e^{-2nx}$  est  $x \rightarrow -\frac{1}{2n} e^{-2nx}$ .

Donc

$$\int_0^1 e^{-2nx} dx = \left[ -\frac{1}{2n} e^{-2nx} \right]_0^1 = -\frac{1}{2n} e^{-2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} (-e^{-2n} + 1)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n = +\infty &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (-2n) = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-2n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-e^{-2n} + 1) = 1 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} (-e^{-2n} + 1) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 e^{-2nx} dx = 0$$

On sait que  $0 \leq I_n \leq \int_0^1 e^{-2nx} dx$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 e^{-2nx} dx = 0$

Donc d'après le théorème des gendarmes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Ainsi la suite est convergente et a pour limite 0.

**EXERCICE V : (3 points)** 1° : 2 2° : 1 d'après Nouvelle-Calédonie\ novembre 2015

Pour chaque réel  $a$ , on considère la fonction  $f_a$  définie sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  par

$$f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a$$

1. Montrer que pour tout réel  $a$ , la fonction  $f_a$  possède un minimum, que vous préciserez.

**Dérivée :**  $f_a$  est dérivable comme composée puis somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$

Pour tout réel  $x$ ,  $a$  et  $e^a$  sont des constantes

$$\text{donc } f_a'(x) = 1e^{x-a} - 2 = e^{x-a} - 2$$

**Signe de la dérivée :**

$$\text{Racine : } e^{x-a} - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x-a} = 2 \Leftrightarrow x - a = \ln 2 \Leftrightarrow x = a + \ln 2$$

Signe  $e^{x-a} - 2 > 0 \Leftrightarrow e^{x-a} > 2 \Leftrightarrow x - a > \ln 2 \Leftrightarrow x > a + \ln 2$  (on a utilisé le fait que la fonction exponentielle est une bijection strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ )

**Tableau de variation de la fonction  $f_a$**

$x$	$-\infty$	$a + \ln 2$	$+\infty$
$f_a'(x)$		- 0 +	
$f_a$			

**Minimum de la fonction  $f_a$**

$$f_a(a + \ln 2) = e^{a + \ln 2 - a} - 2(a + \ln 2) + e^a = e^{\ln 2} - 2(a + \ln 2) + e^a = 2 - 2a - 2 \ln 2 + e^a$$

**Conclusion :**

**D'après le tableau de variation, la fonction  $f_a$  possède un minimum égal à  $2 - 2a - 2 \ln 2 + e^a$  atteint en  $x = a + \ln 2$**

2. Existe-t-il une valeur de  $a$  pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

On cherche s'il existe une valeur de  $a$  pour laquelle le minimum  $2 - 2a - 2 \ln 2 + e^a$  admet lui-même un minimum. Le réel  $a$  devient ici une variable

$$\text{On pose } \varphi(a) = 2 - 2a - 2 \ln 2 + e^a$$

**Dérivée :**  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$

$$\text{Pour tout réel } a, \varphi'(a) = -2 + e^a$$

$$\text{Racine : } -2 + e^a = 0 \Leftrightarrow e^a = 2 \Leftrightarrow a = \ln 2$$

$$\text{Signe : } -2 + e^a > 0 \Leftrightarrow e^a > 2 \Leftrightarrow a > \ln 2$$

**Tableau de variation de la fonction  $\varphi$**

$a$	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$\varphi'(a)$		- 0 +	
$\varphi$			

D'après ce tableau de variation,  $\varphi$  a un minimum atteint en  $a = \ln 2$

**Ainsi, il existe un réel  $a = \ln 2$  pour lequel le minimum  $2 - 2a - 2 \ln 2 + e^a$  de la fonction  $f_a$  est le plus petit possible.**

$$\text{Calcul du minimum (non attendu) : } \varphi(\ln 2) = 2 - 2 \ln 2 - 2 \ln 2 + e^{\ln 2} = 2 - 4 \ln 2 + 2 = 4 - 4 \ln 2$$